定性的に表現された曲線の平面埋め込みにおける自己交差性判定方法の正当性

高橋 和子　森口 草介　今井 宜洋

連続な曲線を記号表現し，2 次元平面へ埋め込んだときの自己交差性を，その記号表現上で判定する方法の正当性について議論する．曲線の形状を，方向と凸性を属性として持つ曲線分を単位セグメントとして連結していくことで記号表現する方法がこれまでに提案されている．また，与えられた記号表現に対して 2 次元平面上にらせん状にならないように描く方法がある (許容可能性) かどうかを判定する手法として簡約操作が提案されている．著者らはこれまでにこれらの枠組を定式化しいくつかの性質を証明支援系 Rocq で証明した．本発表では，未証明だった簡約操作における性質の 1 つである許容可能性保持の厳密な形式化を試みる．簡約前の記号表現に対応する図をもとに簡約後の記号表現に対応する図として，セグメント間の連結条件を満たし，各セグメントの定性的な形状を保持し，らせん状にならない曲線が描けることの手証明を示す．

1　はじめに

曲線は自然界に多く見られる形状であり，2 次元平面上に射影されたオブジェクトの輪郭として出現することが多い．一般に，計算機で曲線を扱う場合には実際の形状をできるだけ正確なデータとして表すために数値関数や点列を使って表現し，数値計算によって処理することが多い．

一方，概形や重なり方などの性質や周囲との相対的な関係のみに着目したい場合には，詳細な情報を気にせず離散的な記号表現として記述する方法もある．その代表的なアプローチの 1 つが定性空間推論である [3] [9] [2] [12]．高橋は定性空間推論の一手法として，方向と凸性を属性としてもつ曲線分を単位セグメントとし複数の単位セグメントを連結していくことで尖点を持たない円滑な曲線を記号列として表現し，その表現上で部分的な情報から全体の形状を推論する手法を提案した [13]．また，このように構成された記号列から 2 次元平面上への写像を考え，らせん状にならないように描ける写像が存在するかどうかを許容可能性として定義し，それを判定する効率的手法として簡約を提案しその性質を示した [14]．さらに，この枠組について証明支援系を使った厳密な形式化と正当性の証明を行ったが [17]，すべては完了していない．本発表では，未証明だった，簡約操作における許容可能性保持の厳密な形式化を試みる．簡約前の記号表現に対応する曲線を 2 次元平面上に描いてそれをもとに簡約後の記号表現に対応する曲線の原型を作成し，それを変形していくことで所望の曲線が得られることを示す．すなわち，簡約後の記号表現に対して，セグメント間の連結条件を満たし，各セグメントの定性的な形状を保持し，らせん状にならない曲線が描けることを示す．最終的には，証明支援系の上での実装と証明を目的とし，手証明でできるだけ厳密な形式化を行う．

本発表は以下のように構成される．第 2 節で曲線の定性表現と 2 次元平面への埋め込み，および簡約について紹介する．第 3 節で簡約の前後で許容可能性が保持されることを証明する．第 4 節で関連研究

---

* Correctness of a Method for Determining Self-Intersection in Planar Embeddings of Qualitatively Defined Curves.

This is an unrefereed paper. Copyrights belong to the Author(s).

Kazuko Takahashi, 関西学院大学工学部, School of Engineering, Kwansei Gakuin University.

Sosuke Moriguchi, 東京科学大学情報理工学院, School of Computing, Institute of Science Tokyo.

Yoshihiro Imai, proof ninja, Inc., proof ninja, Inc..

と比較し，最後に第 5 節で結論と今後の課題について述べる．

2 曲線の定性表現の体系

2.1 *scurve*

2 次元平面上の有向曲線のセグメントで，方向と凸性が一定であるようなものの集合を $CURVES$ とする．$CURVES$ の要素はその方向と凸性のみに注目してその形状を定性的に表す．正確なサイズや曲率は無視する．

図 1 において左の 3 つは定性的に同一であり，右の 2 つとはそれぞれ異なると見なす．

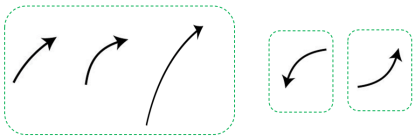


図 1　セグメントの定性的な分類

$S_v = \{n, s\}$, $S_h = \{e, w\}$, $Conv = \{cx, cc\}$ および $Dir = S_v \cup S_h$ とする．ここで，記号 n, s, e, w はそれぞれ上，下，右，左を表し，cx, cc はそれぞれ上に凸，下に凸を表す．真横を向くものは n, s のいずれかに分類し，真上や真下を向くものは e, w のいずれかに分類する．また，直線は考えない．各集合の要素に対してその集合内の相補的な要素を割り当てる関数を i とする．すなわち $i(s) = n, i(n) = s, i(e) = w, i(w) = e, i(cx) = cc, i(cc) = cx$ である．

$\boldsymbol{X} \in CURVES$ を**セグメント**と呼び，その定性的な形状を $V \in S_v, H \in S_h, C \in Conv$ である 3 項組 (V, H, C) で表す．これを $\boldsymbol{X}$ の**定性表現**と呼ぶ．

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in CURVES$ に対して $X = (V, H, C)$, $Y = (V', H', C')$ をそれぞれ $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ の定性表現とする．$CURVES$ 上の関係 $\sim$ を $V = V'$, $H = H'$, $C = C'$ が成り立つときのみ $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{Y}$ であると定義すると，$\sim$ は $CURVES$ 上の同値関係になる．その結果，$CURVES$ は 8 つの同値類に分割される．これを $\mathcal{S} = CURVES/\sim$ とおく．$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{Y}$ のとき，$\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ は**定性的に同型**という．

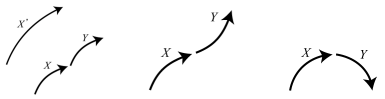
$X \in \mathcal{S}$ を**単位セグメント**と呼び，その始点と終点をそれぞれ $init(X)$, $term(X)$ と表記する．

$X, Y \in \mathcal{S}$ に対して $init(Y)$ と $term(X)$ を同一視することで円滑な曲線を形成する．

定義 1 以下の条件を満たすとき，X, Y は**直接連結可能**といい，$dc(X, Y)$ と記述する．また，連結した結果を $X \cdot Y$ と表す．

- $dc(X, Y)$ *iff*
  $ssp(X, Y)$ *or* $ifl(X, Y)$ *or* $xtr(X, Y, D)$ $(D \in Dir)$.
- $ifl(X, Y)$ *iff*
  $X = (V, H, C)$ *and* $Y = (V, H, i(C))$.
- $xtr(X, Y, V)$ *iff*
  $X = (V, H, C)$ *and* $Y = (i(V), H, C)$.
- $xtr(X, Y, H)$ *iff*
  $X = (V, H, C)$ *and* $Y = (V, i(H), i(C))$.

X, Y の正確な曲率は無視するため，同一のクラスに属する単位セグメントのペアは直接連結可能であり，この 2 つを連結して得られる新たな曲線は尖点を持たない単一セグメントと見なす (図 2(a))．そうでない場合，セグメントのペア X, Y は，直接連結において変曲点または極点を形成する．$ifl(X, Y)$ は $X \cdot Y$ が変曲点を持つことを表し (図 2(b))，$xtr(X, Y, D)$ は，極点を持つことを表す (図 2(c))．



(a) *ssp*　(b) *ifl*　(c) *xtr*

図 2　直接連結可能な単位セグメントのペア

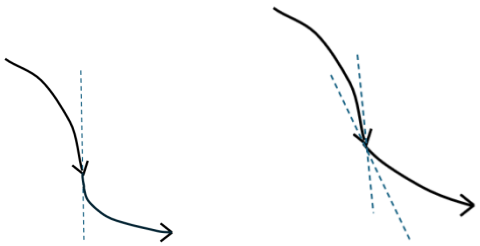
定義 2 単位セグメント $X_1, \ldots, X_n$ $(n > 0)$ に対して，X_1 または $X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$ ただし $X_{i-1} \neq X_i$ $(\forall i; 2 \leq i \leq n)$ を ***scurve*** と呼ぶ．

scurve は単位セグメントを連結することで生成される連続で有限な有向曲線である．

2.2 *scurve* の 2 次元平面への埋め込み

$\mathcal{S}$ から $CURVES$ への写像を考える．

1. 2 次元平面上のセグメント $\boldsymbol{X} \in CURVES$ の定



(a) きつい連結　　(b) ゆるい連結

図 3　きつい連結とゆるい連結

性表現を $X \in \mathcal{S}$ とするとき，$\boldsymbol{X}$ を X **の埋め込み**と呼ぶ．$init(\boldsymbol{X})$，$term(\boldsymbol{X})$ はそれぞれ 2 次元平面上における $\boldsymbol{X}$ の始点と終点の位置を表す．

2. $sc = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$ を *scurve*，$\boldsymbol{X}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ を X_i の埋め込みとする．任意の i $(1 \leq i \leq n-1)$ に対して，$term(\boldsymbol{X}_i)$ と $init(\boldsymbol{X}_{i+1})$ が同一位置に配置されているとき，$\boldsymbol{X}_1 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{X}_n$ を sc **の埋め込み**という．

単一の *scurve* に対してその埋め込みは無限個存在する．

定義 3 $\boldsymbol{sc}, \boldsymbol{sc}'$ が同じ scurve の埋め込みのとき，$\boldsymbol{sc}$ と $\boldsymbol{sc}'$ は**定性的に同型** という．

$ifl(X, Y)$ のとき，描き方によって連結点が尖点になる可能性がある．ここでは連結を 2 種類に分けて考える．

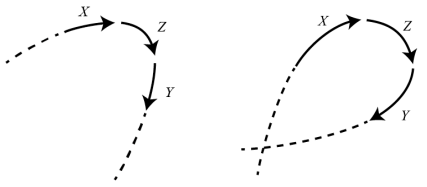
定義 4 X, Y を直接連結可能な単位セグメント，$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ をそれぞれの埋め込みとする．$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}$ において，$term(\boldsymbol{X})$，$init(\boldsymbol{Y})$ における接線の傾きが一致する場合を**きつい連結**，必ずしも一致しない場合を**ゆるい連結**と呼ぶ *(*図 *3)*.

きつい連結では埋め込まれた曲線は尖点をもたない．

また，同一の *scurve* に対して，埋め込み方によってらせん状になる場合とそうでない場合がある．

scurve の 2 次元平面への埋め込み $\boldsymbol{X}_1 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{X}_n$ に対して，$init(\boldsymbol{X}_1)$ および $term(\boldsymbol{X}_n)$ における接線をそれぞれ $\boldsymbol{X}_1$ の始点方向および $\boldsymbol{X}_n$ の終点方向に延長することで無限曲線（延長部分は直線）を得る．この曲線が交差しない場合，その埋め込みは**開** *(open)* といい，自己交差する場合は**閉** *(closed)* という．開埋め込みが存在するときその *scurve* を**許容可能** *(admissible)* という．

図 4 はそれぞれ $X = (n, e, cx)$，$Z = (s, e, cx)$，$Y = (s, w, cc)$ の場合の *scurve* $X \cdot Z \cdot Y$ の開埋め込みと閉埋め込みを示している．開埋め込みが存在するので $X \cdot Z \cdot Y$ は許容可能である．



(a) open　　(b) closed

図 4　$X \cdot Z \cdot Y$ の 2 種類の埋め込み

一方，$X = (n, e, cx)$，$Z_1 = (s, e, cx)$，$Z_2 = (s, w, cc)$, $Y = (n, w, cc)$ の場合，*scurve* $X \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Y$ には閉埋め込みしか存在しない (図 5)．したがって $X \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Y$ は許容可能ではない．

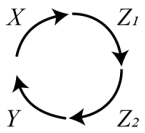


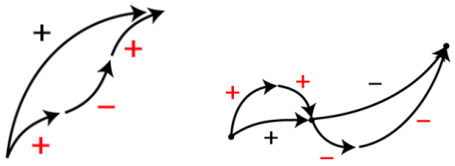
図 5　閉埋め込みしか存在しない *scurve*

2.3　簡約と許容可能性判定

scurve の許容可能性は，それを辿ったときの回転の向きを考えることで判定可能である．

$X \in \mathcal{S}$ の向きを時計回り $(+)$/半時計回り $(-)$ のいずれかに決める関数 *orn* を定義し，さらに， *scurve* の向きをそれを構成するセグメントの向きの列と定義する．

- (単位セグメントの向き) $X \in \mathcal{S}$ に対して $orn(X) = \text{`}+\text{'}$ iff $X = (n, e, cx)$, $(s, e, cx)$, $(s, w, cc)$ or $(n, w, cc)$; $orn(X) = \text{`}-\text{'}$ iff $X = (s, w, cx)$, (s, e, cc), (n, e, cc) or (n, w, cx).
- (*scurve* の向き) $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{S}$ に対して



(a) r1　　(b) r2

図 6　簡約規則と対応する図

$orn(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n) = orn(X_1) \ldots orn(X_n)$.

たとえば図 5 において $orn(X \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Y) = ++++$ である.

scurve sc の向き $orn(sc)$ に出現する $+$ と $-$ の個数の差を $orn(sc)$ **の回転差** と呼ぶ.

また，集合 $\{+, -\}$ の上で相補となる要素を割り当てる関数 inv を $inv(+) = -$，$inv(-) = +$ と定義する.

scurve の向きを簡約することによって，与えられた任意の長さの *scurve* の許容可能性を効率的に判定する．簡約規則は 2 つあり，1 つは向きが $+-+$ (または $-+-$) の部分列を $+$ (または $-$) で置き換えるもの，もう 1 つは $++--$ (または $--++$) の部分列を $+-$ (または $-+$) で置き換えるものである (図 6).

[簡約規則]

σ_1, σ_2 を向きの列，$o_1, o_2, o_3, o_4 \in \{+, -\}$ とする.

(r1) $o_1 = o_3 = inv(o_2)$ のとき，$\sigma_1 o_1 o_2 o_3 \sigma_2$ を $\sigma_1 o_1 \sigma_2$ と置き換える.

(r2) $o_1 = o_2 = inv(o_3) = inv(o_4)$ のとき，$\sigma_1 o_1 o_2 o_3 o_4 \sigma_2$ を $\sigma_1 o_1 o_4 \sigma_2$ と置き換える.

scurve の向き σ の部分列に可能な限り (r1), (r2) を適用して得られる向きの列を σ **の簡約形** と呼ぶ.

任意の向きの列に対して以下の性質が成り立つ.

命題 1 (簡約の性質)　*1. (停止性)*

簡約過程は停止する.

2. (回転差保持)

簡約において回転差は保持される.

3. (簡約形)

(a) 簡約形は，両端にそれぞれ高々 *1* 個の逆向き方向 $inv(x)$ にはさまれた同一の向き x の *0* 個以上の列である.

(b) 任意の向きの列に対して，両端にある向きはいずれも簡約過程で変化しない.

4. (合流性)

簡約規則の適用順にかかわらず簡約形は一意的に定まる.

5. (許容可能性の保持)

簡約過程において許容可能性は保持される.

命題 2 (許容可能性の判定) 任意の向きの列に対して，回転差が *4* 以上の向きの列は許容可能でなく，回転差が *3* 以下のとき，得られる簡約形は *11* 個に限定される．ただし，$+$ と $-$，および向きの列を前から見たときと後ろから見たときに対称なものは同一のものと考えている．この中で許容可能でないものは *2* 個のみである.

これら 2 つの命題については，命題 1 の「許容可能性の保持」をのぞいて Rocq (coq) で証明済みである [17] [11].

3　許容可能性の保持

本節では，*scurve* の xy-平面への埋め込みについて議論するため，特に断わらない限り，$s, t, s_1, s_2, \ldots$ 等は単位セグメントの埋め込みを表すものとする.

また，向きの列だけではなく，*scurve* に対しても簡約形という用語を使用する．すなわち，sc, sc' を *scurve* とするとき，$orn(sc')$ が $orn(sc)$ の簡約形になっている場合，sc' を sc の簡約形と呼ぶ.

3.1　証明の方針

簡約過程において許容可能性が保持されることを示す.

scurve が許容可能なので，開埋め込みを描き，それをもとにして簡約規則を 1 回適用した後の *scurve* の埋め込みを作成する．曲線の中で簡約規則を適用する部分以外の残りの部分が，簡約前後のセグメントで囲まれた領域に存在しないように，この領域から離してやればよい．このことは直観的にはほぼ明らかに思えるが，定性的な形を保ちながら動かすと，動かしたところに別のセグメントが存在している場合もあり，形式化はそれほど単純ではない.

証明の方針は以下の通りである．xy-平面において，

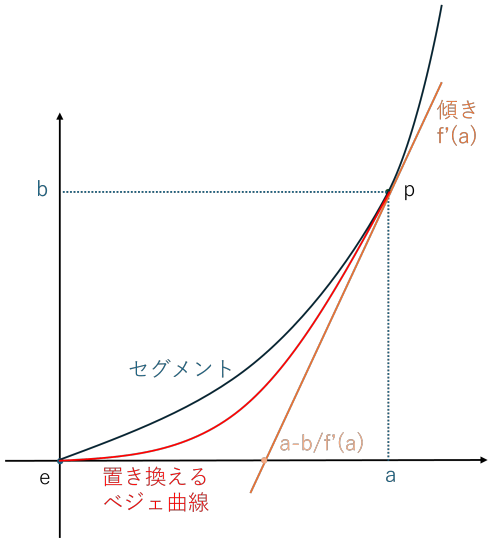


図 7　ゆるい連結からきつい連結への変換

簡約部分は固定して *scurve* の残りの部分を動かすことを考える．簡約部分とその両端点から y 軸へ平行にひいた半直線で xy-平面を左右に分割する．この分割線を境として，簡約部分以外のセグメントをすべて（上下はそのままで）左右に移動または引き伸ばして変形することで *scurve* の開埋め込みを作成する．

3.2　疎な埋め込み

補題 1 許容可能な scurve の開埋め込みは，ゆるい連結部分をすべてきつい連結にした定性的に同型な曲線に変更できる．

証明) 許容可能な *scurve* の開埋め込み ***sc*** において，任意のセグメント s に対してその 1 つの端点を e とする．***sc*** は自己交差しないことから，e と s 上のある点 p を対角とする矩形内に他のセグメントの点が存在しないような点 p がとれる．

例として s が右上方向を向く下に凸の形状の場合を示す (図 7)．s は e を原点とし第 1 象限に存在する．s を表す関数を f とする．また，p の座標を (a, b) $(a > 0, b > 0)$ とする．

このとき $f(0) = 0, f(a) = b$．また，平均値の定理から $\exists x. 0 < x < a; f'(x) = b/a$．したがって $f'(a) > b/a > 0$.

この矩形の範囲の曲線を，制御点 $P_1(0,0), P_2(a - b/f'(a), 0), P_3(a, b)$ を用いた 2 次ベジェ曲線 l に置き換える．P_2 の x 座標は，$a > a - b/f'(a) > 0$ より 0 と a の間にある．

2 次ベジェ曲線は，以下の特徴をもつ．

- 間のすべての点が制御点による三角形の内部に存在する
- 端の制御点と中央の制御点にひいた直線に，端の制御点上で接する

2 番目の特徴から，l は点 p 上では傾き $f'(a)$ の線に接し，原点では x 軸に接する．また，$0 < x < a$, $0 < y < b$ の範囲に他のセグメントは通らないという仮定から，l は他のセグメントと交差しない．

よって，$0 \leq x \leq a$ の範囲を f から l に置き換えたセグメント（$a < x$ の範囲は元のセグメントをそのまま利用）は，以下を満たす．

- 端点の座標が元のセグメントと同じ
- 微分値が連続
- 端点 e で x 軸に対して微分値が 0

すべてのセグメントの両端点にこの処理を行うことで，以下を満たすことができる．

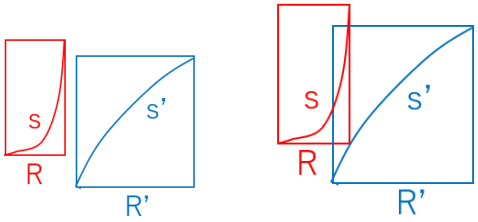
- セグメントの端点における微分の右（左）極限が x, y どちらかの座標軸で 0
- セグメントの一次微分が連続
- もとのセグメントと定性的に同型

したがって，すべての連結点においてきつい連結になるような埋め込みが存在し，尖点を持たない．　□

定義 5 scurve の埋め込み ***sc*** において，各セグメント s の始点と終点を対角線とする矩形を ***sc*** における s の**セグメント領域**と呼ぶ．

s, s' を ***sc*** の任意の異なるセグメントとする．***sc*** において s のセグメント領域 R と s' のセグメント領域 R' が共有点を持たないとき，***sc*** を**疎な埋め込み**と呼ぶ *(図 8)*.

疎な埋め込みは明らかに自己交差しない．



(a) 疎である場合　　(b) 疎でない場合

図 8　セグメント領域同士の位置関係

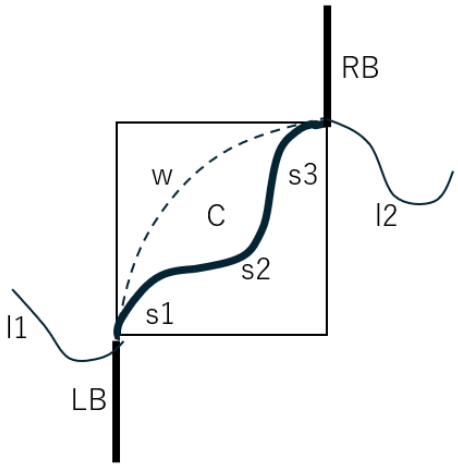


図 9　簡約規則 (r1) に関する表記

3.3　簡約規則 (r1) に関する許容可能性保持

許容可能な $scurve$ に対して，それを xy-平面上に埋め込み，その図の上で簡約後の $scurve$ の埋め込みの原型を作成する．

xy-平面上に埋め込んだ図において以下のように名前をつける (図 9)．

- $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3$: 簡約を適用するセグメント列 (回転方向は $+-+$ とする)
- w: $init(s_1)$ と $term(s_3)$ を結ぶ回転方向 $+$ のセグメントで s_1, s_2, s_3 と交差しないもの
- C: s_1, s_2, s_3, w で囲まれる領域
- l_1: $init(s_1)$ に連結する $scurve$ の埋め込み部分および始点における接線の始点方向への延長
- l_2: $term(s_3)$ から連結する $scurve$ の埋め込み部分および終点における接線の終点方向への延長
- LB: $init(s_1)$ の始点から下方向に y 軸に平行に延長した半直線
- RB: $term(s_3)$ の終点から上方向に y 軸に平行に延長した半直線

平面上で LB, s_1, s_2, s_3, RB をこの順につないでできる曲線を**分割線**と呼び，分割線の左右の領域（分割線を含まない）をそれぞれ $Left, Right$ と呼ぶ．

セグメント列 $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3$ を w に置き換えた曲線を $\boldsymbol{sc}$ とおく．

そのままでは自己交差してしまう場合があるので，変形していく必要がある．

l_1, l_2 が C と共有点を持たない場合，$\boldsymbol{sc}$ を変形する必要はない．

l_1, l_2 が C と共有点をもつ場合，十分大きな距離を d とし，l_1, l_2 に属する各セグメントに対して以下の操作を施した結果得られる曲線を $\boldsymbol{sc}'$ とする．

操作は大きく分けて移動 $(move)$ と引き伸ばし $(stretch)$ である．いずれも横方向のみの位置変更であり，縦方向は不変である．

図 10 に各操作に対応する xy-平面上での変更を示す．黒の太い実線が分割線であり，赤の実線が l_1, l_2 に属するあるセグメントおよびそのセグメント領域を示す．赤の点線は各操作を施したあとのセグメント s' およびそのセグメント領域を示す．

[セグメント変形の操作]

l_1, l_2 に属する任意のセグメント s に対し，$init(s), term(s)$ の片方を A, もう片方を B とおく．

- $s' = move_left(s)$: A, B ともに $Left$ に属する場合，s の形を保ったまま左側に d だけ平行移動する (図 10(a))．
- $s' = move_right(s)$: A, B ともに $Right$ に属する場合，s の形を保ったまま右側に d だけ平行移動する (図 10(b))．
- $s' = stretch_left(s)$: A が分割線，B が $Left$ に属する場合，B を左側に d だけ平行移動して B' とし，A と B' を始点終点として s と定性的に同型なセグメントを描く (図 10(c))．
- $s' = stretch_left(s)$: A が分割線，B が $Right$ に属する場合，B を右側に d だけ平行移動して B' とし，A と B' を始点終点として s と定性的に同型なセグメントを描く (図 10(d))．
- $stretch_both(s)$: A が $Left$, B が $Right$ に属する場合，A を左側に d だけ平行移動して A' とし，B を右側に d だけ平行移動して B' とし A' と B' を始点終点として s と定性的に同型なセグメントを描く (図 10(e))．

補題 2 開埋め込みにおいて l_1, l_2 のセグメントが疎な埋め込みのとき，簡約規則 *(r1)* 適用後の scurve の埋め込み $\boldsymbol{sc} = t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_n$ に対して，上記操作を施すことによって得られた曲線を $\boldsymbol{sc}' = t'_1 \cdot t'_2 \cdot \ldots \cdot t'_n$ とすると，以下の性質が成り立つ．

性質 1 任意の i $(1 \leq i \leq n)$ に対して，t_i と t'_i は定性的に同型

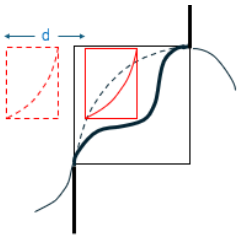
性質 2 $\boldsymbol{sc}'$ は尖点をもたない

性質 3 $\boldsymbol{sc}'$ は自己交差せず疎になる

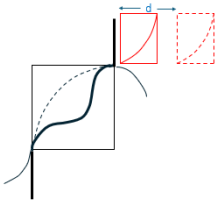
性質 4 $\boldsymbol{sc}'$ は scurve の開埋め込みになる

証明)

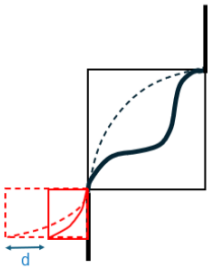
[性質 1] 作り方から明らかに同型になる．*move* の場合は埋め込みの形状も完全一致する．



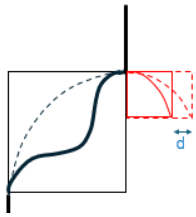
(a) $move_left$



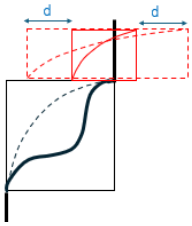
(b) $move_right$



(c) $stretch_left$



(d) $stretch_right$



(e) $stretch_both$

図 10　セグメント変形の操作 (r1)

[性質 2] まず，s_1, s_3, w は定性的に同型なので $\boldsymbol{sc}$ において，$init(s_1), term(s_3)$ においては直接連結可能な条件が満たされており，$\boldsymbol{sc}$ は $scurve$ の埋め込みになっている．$Left$ に属する連結点はすべて左方向に d だけ移動しており，$Right$ に属する連結点はすべて右方向に d だけ移動している．各セグメントは定性的に同型のものに変更されているので，すべての連結点において直接連結可能になっている．したがって，$\boldsymbol{sc}'$ は $scurve$ の埋め込みになっている．また，補題 1 からゆるい変更をきつい連結に変更することが可能なので，$\boldsymbol{sc}'$ は尖点を持たないようにできる．

[性質 3] $Right$ において交差がないことを示す．$\boldsymbol{sc}$ の任意のセグメント s, t のセグメント領域の中で $Right$ に属する部分領域をそれぞれ R_s, R_t とする (分割線に接する場合を含む)．R_s の左下の座標を (x_1, y_1), 右上の座標を (x_2, y_2) とし，R_t の左下の座

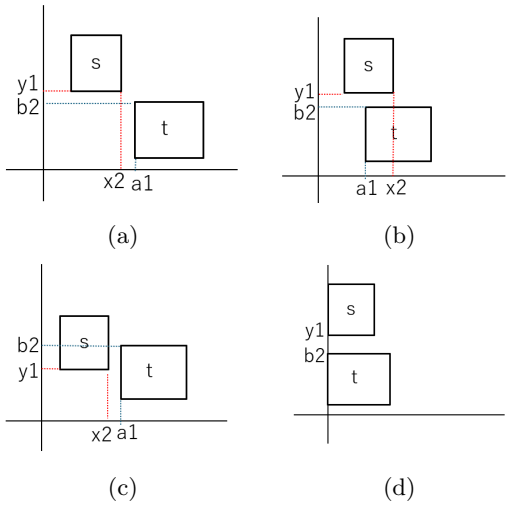


図 11 *Right* **でのセグメント領域同士の位置関係**
（$y_1 \leq b_1$ のとき）

標を (a_1, b_1), 右上の座標を (a_2, b_2) とする．$x_1 \leq a_1$ とする．

(1) $y_1 \leq b_1$ のとき

a_1 が分割線上にない場合，t に対しては *move* が行われるはずである．

l_1, l_2 は疎な埋め込みなので，セグメント領域同士は共有点を持たない．したがって，$\neg(a_1 < x_2) \vee \neg(y_1 < b_2)$ が成り立つ．すなわち R_s, R_t の位置関係は図 11(a)，(b)，(c) のいずれかになる．図 11(a)，(b) の場合は $\neg(y_1 < b_2)$ であり，変形操作は横方向のみなので操作後のセグメント領域は共有点を持たない．図 11(c) の場合は $\neg(a_1 < x_2)$ であり，$\neg(a_1 + d < x_2 + d)$ から操作後のセグメント領域は共有点を持たない．

a_1 が分割線上にある場合，s, t とも *stretch* が行われるはずである (図 11(d))．この場合，$\neg(y_1 < b_2)$ で変形操作は横方向のみなので操作後のセグメント領域は共有点を持たない．

(2) $y_1 \leq b_1$ のとき

(1) と同様．

したがって，*Right* においては自己交差なく疎である．

Light においても自己交差なく疎である．

また，d を十分大きくとっていれば，w のセグメント領域に $\boldsymbol{sc}'$ の他のセグメントが存在することはない．

したがって，$\boldsymbol{sc}'$ は自己交差せず疎になる．

[性質 4] $\boldsymbol{sc}$ の両端のセグメント t_1, t_n および $\boldsymbol{sc}'$ の両端のセグメント t'_1, t'_n を考える．

$term(t_n)$ が分割線または *Right* に属するとする．t'_n が t_n に *stretch* を施した結果得られた場合は，t'_n のセグメント領域は変えずに $term(t'_n)$ における接線の傾きを $term(t_n)$ と同じになるように t'_n を変更する．これは補題 1 の逆を考えると可能である．すると，t_n に対する操作が *move* でも *stretch* でも，結果として得られる $term(t'_n)$ は，x 座標を $term(t_n)$ から d だけ右方向に移動，y 座標は不変で，接線の傾きはもとのままのものである．一方，$\boldsymbol{sc}$ は *scurve* の開埋め込みに簡約規則 (r1) を適用したもので，l_1, l_2 部分は操作していないことから，$term(t_n)$ における接線は任意のセグメント t_i $(1 \leq i \leq n)$ と交差しない．$\boldsymbol{sc}$ の任意のセグメントで，セグメント領域が分割線または *Right* と共有点をもつものは，そのセグメント領域の右上および右下の点はセグメント変形の操作によって d だけ右に平行移動している．したがって $term(t'_n)$ における接線が *Right* において他の任意のセグメントと交差することはない．*Left* に属する場合も同様．

同様に，$init(t'_1)$ における接線が他の任意のセグメントと交差することはない．

さらに，この 2 本の接線の傾きは $\boldsymbol{sc}$ における端点の接線の傾きのままにしていることからこれらの接線が交わることはない．

したがって，$\boldsymbol{sc}'$ は開埋め込みである． □

この補題から以下の定理が成り立つ．

定理 1 許容可能な scurve に対して簡約部分以外が疎な埋め込みになっているとき，scurve に簡約規則 *(r1)* を 1 回適用して得られる scurve は許容可能である．

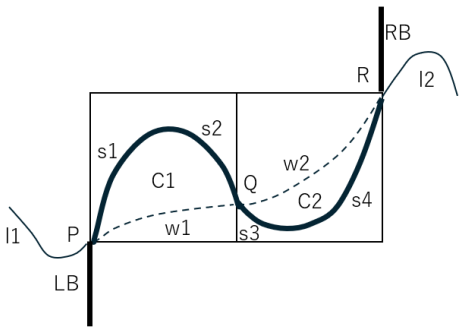


図 12　簡約規則 (r2) に関する表記 ($y_p < y_q < y_r$ のとき)

3.4　簡約規則 (r2) に関する許容可能性保持

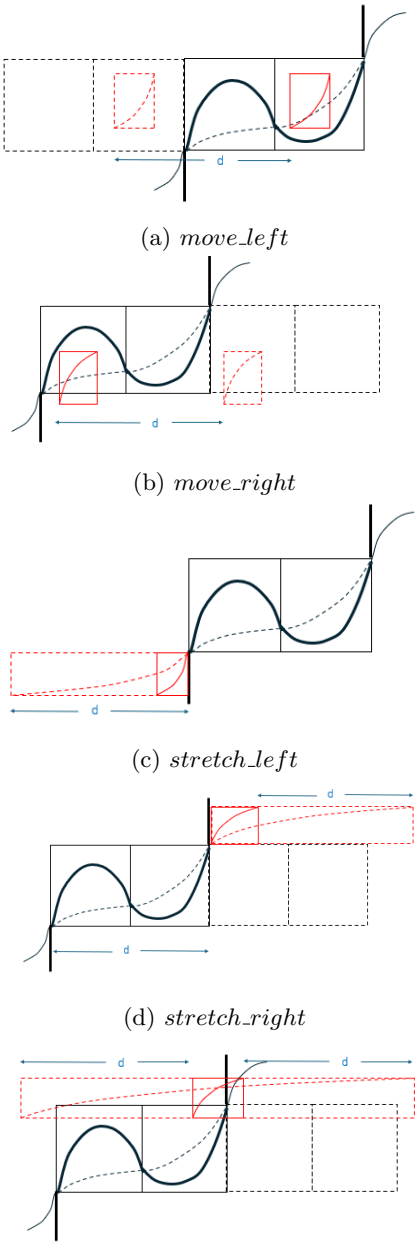
許容可能な *scurve* に対して，それを xy-平面上に埋め込み，その図の上で簡約後の *scurve* の埋め込みの原型を作成する．

xy-平面に埋め込んだ図において以下のように名前をつける (図 12)．

- $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot s_4$: 簡約を適用するセグメント列 (回転方向は $++--$ とする．)
- P: $init(s_1)$
- Q: $init(s_3)$
- R: $term(s_4)$
- l_1: $init(s_1)$ に連結する *scurve* の埋め込み部分および始点における接線の始点方向への延長
- l_2: $term(s_4)$ から連結する *scurve* の埋め込み部分および終点における接線の終点方向への延長
- LB: $init(s_1)$ から下方向に y 軸に平行に延長した半直線
- RB: $term(s_4)$ から上方向に y 軸に平行に延長した半直線

平面上で $LB, s_1, s_2, s_3, s_4, RB$ をこの順につないで構成される曲線を**分割線**とする．

補題 3 開埋め込みにおいて l_1, l_2 のセグメントが疎な埋め込みのとき，簡約規則 *(r2)* 適用後の scurve の埋め込み $\boldsymbol{sc} = t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_n$ に対して，セグメント変形の操作を施すことによって得られた曲線を $\boldsymbol{sc}' = t'_1 \cdot t'_2 \cdot \ldots \cdot t'_n$ とすると，補題 *2* の *4* つの性質が成り立つ．



(a) *move_left*

(b) *move_right*

(c) *stretch_left*

(d) *stretch_right*

(e) *stretch_both*

図 13　セグメント変形の操作 (r2)

証明)

P, Q, R の縦方向の位置関係によって簡約で置き換えるセグメントの形状が変わるため，場合分けして考える．

P, Q, R の y 座標をそれぞれ y_p, y_q, y_r とする．

($Case1$) $y_p < y_q < y_r$ のとき (図 12)

以下のように定義する.

- w_1: P, Q を結ぶ回転方向 $+$ のセグメントで s_1, s_2 と交差しないもの
- w_2: Q, R を結ぶ回転方向 $-$ のセグメントで s_3, s_4 と交差しないもの
- C_1: s_1, s_2, w_1 で囲まれる領域
- C_2: s_3, s_4, w_2 で囲まれる領域

セグメント列 $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot s_4$ を $w_1 \cdot w_2$ に置き換えた曲線を $\boldsymbol{sc}$ とおく.

そのままでは自己交差してしまう場合があるので, 変形していく必要がある.

l_1, l_2 がともに C_1, C_2 のいずれとも共有点を持たない場合, $\boldsymbol{sc}$ を変形する必要はない.

l_1, l_2 のいずれかが C_1, C_2 のいずれかと共有点をもつ場合, 十分大きな距離を d とし, l_1, l_2 に属する各セグメントに対してセグメント変形の操作を施した結果得られた曲線を $\boldsymbol{sc}'$ とする. 図 13 に各操作に対応する xy-平面上での変更を示す.

[性質 1] 作り方から明らかに同型になる.

[性質 2] P, Q, R の位置関係から Q は尖点にはならない. P, R はもともとの連結点であり w_1 と s_1, w_2 と s_4 はそれぞれ定性的に同型なので P, R における直接連結可能性は保持される. したがって, $\boldsymbol{sc}$ は $scurve$ の埋め込みになっている. $Left$ に属する連結点はすべて左方向に d だけ移動しており, $Right$ に属する連結点はすべて右方向に d だけ移動している. 各セグメントは定性的に同型のものに変更されているので, すべての連結点において直接連結可能になっている. また, 補題 1 からゆるい変更をきつい連結に変更することが可能なので, $\boldsymbol{sc}'$ は尖点を持たないようにできる.

[性質 3] 簡約規則 (r1) の場合と同様にして自己交差せず疎になることが証明できる.

[性質 4] 簡約規則 (r1) の場合と同様にして開埋め込みになることが証明できる.

($Case2$) $y_p < y_r < y_q$ のとき (図 14(a))

簡約によって置き換えたセグメント同士が直接連結可能になっていないので, まずその処理をしてから操作を行う.

P, Q を結ぶ回転方向 $+$ のセグメントと Q, R を結ぶ回転方向 $-$ のセグメントの連結部分 Q は直接連結可能にならないため, P, R を固定し Q を下に移動させて Q' とする (図 14(b)).

以下のように定義する.

- w_1: P, Q' を結ぶ回転方向 $+$ のセグメントで s_1, s_2 と交差しないもの
- w_2: Q', R を結ぶ回転方向 $-$ のセグメントで s_3, s_4 と交差しないもの
- X: w_2 と s_3 の交点
- T: $term(s_1)$
- B: $term(s_3)$
- C_1: 領域 $PTQXQ'P$
- C_2: 領域 XBR

この処理によってセグメント列 $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot s_4$ を $w_1 \cdot w_2$ におきかえた曲線を $\boldsymbol{sc}$, それに対してセグメント変形の操作を施した後の曲線を $\boldsymbol{sc}'$ とおく.

[性質 1] 作り方から明らかに同型になる.

[性質 2] これによって 2 つのセグメント w_1, w_2 は直接連結可能になる. また, w_1 と s_1, w_2 と s_4 はそれぞれ定性的に同型なので P, R における直接連結可能性は保持される. したがって, $\boldsymbol{sc}$ は $scurve$ の埋め込みになっている. $Left$ に属する連結点はすべて左方向に d だけ移動しており, $Right$ に属する連結点はすべて右方向に d だけ移動している. 各セグメントは定性的に同型のものに変更されているので, すべての連結点において直接連結可能になっている. また, 補題 1 からゆるい変更をきつい連結に変更することが可能なので, $\boldsymbol{sc}'$ は尖点を持たないようにできる.

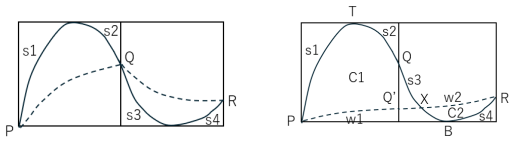
[性質 3][性質 4] (Case1) と同様に証明可能.

($Case3$) $y_r < y_p < y_q$ のとき
(Case2) と同様に証明可能.

($Case4$) $y_r < y_q < y_p$ のとき (図 15(a))
Q における直接連結可能性は成り立つが, P, R においては直接連結可能性の条件を満たさない.

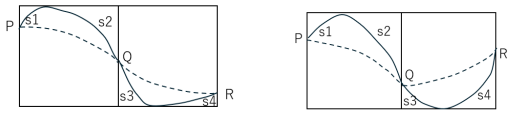
($Case5$) $y_q < y_r < y_p$ のとき (図 15(b))
P, Q において直接連結可能性の条件を満たさない.

($Case6$) $y_q < y_p < y_r$ のとき



(a) 移動前　　(b) 移動後

図 14　連結点の移動 ($y_p < y_r < y_q$ のとき)



(a) $y_r < y_q < y_p$ のとき　(b) $y_q < y_r < y_p$ のとき

図 15　連結点の縦の位置関係

(Case5) の場合と同様.

($Case7$) y_p, y_q, y_r の 2 つ以上が一致するとき P, Q, R のいずれかで直接連結可能の条件を満たさないか，あるいは置き換えられるセグメントがない.

($Case4$)($Case5$)($Case6$)($Case7$) の場合，P, Q, R のいずれかを動かし，(Case2) のような前処理をしてからセグメント変形の操作をすることで同様に証明可能と考えられる. □

この補題から以下の定理が成り立つ.

定理 2 許容可能な scurve に対して簡約部分以外が疎な埋め込みになっているとき，scurve に簡約規則 *(r2)* を 1 回適用して得られる scurve は許容可能である.

予想 1 *scurve* は許容可能ならば疎な埋め込みが存在する.

この，予想が成り立てば，定理 1 および定理 2 の条件は緩和され,「許容可能な *scurve* に簡約規則 (r1/r2) を 1 回適用して得られる *scurve* は許容可能である」となる.

4　関連研究

定性空間推論では，オブジェクト同士の相対的位置関係や方向関係などを扱ったものが多い．これらに比べて形状を扱うのは難しく研究も少ない．形状に着目した定性空間推論手法の多くは，画像上のオブジェクトの輪郭を複数個のセグメントに分割し，各セグメントの形状の特徴を記号で表現し，それらの列としてオブジェクトの概形を表しており [1] [5] [8] [16]，本研究でも同様の手法をとっている．逆に，定義に従った記号列が与えられたとき，2 次元平面上に対応する図が描ける保証はなく，また，描けたとしても自己交差したりらせん状になると，自然界のオブジェクトの輪郭としては妥当でない．しかし，このような側面を対象とした研究はほとんど見当たらず，さらに，これらの体系を形式化したものはわずかである [4] [10] [15].

Grüninger らはオブジェクト同士の包含関係を対象とした定性空間推論の体系 RCC について定理証明系 Prover9 を使って形式化と証明をしている [6]. 一般に，証明支援系を使った図形の性質の証明としては初等幾何の性質を扱ったものやトポロジーとして完全に抽象化したものが多く，記号表現を対象としたものはほとんどない.

曲線やオブジェクトの形状の特徴を扱う研究分野としてはトポロジーをはじめいくつかの分野があるが，本研究の表現方法は，トポロジーよりも細かな分類となっている．曲線の自己交差については，グラフ理論におけるグラフの埋め込みで扱われているが，そこでは平面上におけるノード間の接続関係のみが問題になる．本研究では，ノード間の方向関係およびエッジの凸性まで考慮していることからグラフの埋め込みよりも制約条件はきつい.

5　おわりに

本発表では，定性曲線の 2 次元平面への埋め込みにおいてらせん状にならないように描く方法があるかを判定する際に使用する簡約規則の性質の中で，許容可能性保持の厳密な形式化を試みた.

簡約前の記号表現に対応する曲線を 2 次元平面上に描いてそれをもとに簡約後の記号表現に対応する曲線の原型を作成し，それを変形していくことで，セグメント間の連結条件を満たし，各セグメントの定性的な形状を保持し，らせん状にならない曲線が得られることを示した.

簡約規則 (r1) については証明は完了したが，簡約

規則 (r2) については未証明な部分が残っており，今後の課題である．また，*scurve* の埋め込みが部分的に疎であることを仮定したが，予想 1 が成り立てば，この条件は緩和される．この予想の証明についても今後の課題になっている．

最終的には，証明支援系の上での実装と証明を行う予定である．

謝辞 本研究は JSPS 科研費補助金 JP24K15096 の助成を受けたものである．

参 考 文 献

[1] Cabedo, L. M. and Escrig, M. T.: A qualitative theory for shape representation and matching for design, *Proceedings of the Sixteenth Eureopean Conference on Artificial Intelligence, ECAI'2004*, 2004, pp. 858–862.

[2] Chen, J., Cohn, A., Liu, D., Wang, S., Ouyang, J., and Yu, Q.: A survey of qualitative spatial representations, *The Knowledge Engineering Review*, Vol. 30(2013), pp. 106–136.

[3] Cohn, A. and Renz, J.: Qualitative Spatial Representation and Reasoning, *Handbook of Knowledge Representation*, Elsevier, 2008, chapter 13.

[4] Dufourd, J.-F.: An intuitionistic proof of a discrete form of the Jordan Curve Theorem formalized in Coq with combinatorial hypermaps, *J. of Automated Reasoning*, Vol. 43, No. 1(2009), pp. 19–51.

[5] Galton, A. and Meathrel, R.: Qualitative outline theory, *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, (1999), pp. 1061–1066.

[6] Grüninger, M. and Aameri, B.: A new perspective on the mereotopology of RCC8, *The 13th International Conference on Spatial Information Theory (COSIT 2017)*, 2017, pp. 2:1–2:13.

[7] Leroy, X.: A formally verified compiler back-end, *J. of Automated Reasoning*, Vol. 43, No. 4(2009), pp. 363–446.

[8] Leyton, M.: A process-grammar for shape, *Artificial Intelligence*, Vol. 34(1988), pp. 213–247.

[9] Ligozat, G.: *Qualitative Spatial and Temporal Reasoning*, Wiley, 2011.

[10] Moriguchi, S., Goto, M., and Takahashi, K.: Towards verified construction for planar class of a qualitative spatial representation, *SCSS 2016: 7th International Symposium on Symbolic Computation in Software Science*, 2016, pp. 117–129.

[11] proof ninja: Scurve proof repository, `https://github.com/proof-ninja/coq-scurve/`.

[12] Sioutis, M. and Wolter, D.: Qualitative spatial and temporal reasoning: current status and future challenges, *Proceedings of the 30th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 2021, pp. 4594–4601.

[13] Takahashi, K.: Qualitative formalization of a curve on a two-dimensional plane, *The 16th International Conference on Spatial Information Theory (COSIT 2024)*, 2024, pp. 4:1–4:19.

[14] Takahashi, K.: Reasoning about the embedded shape of a qualitatively represented urve, *SCSS 2024 WIP: 10th International Symposium on Symbolic Computation in Software Science - Work in Progress Workshop*, 2024, pp. 113–118.

[15] Takahashi, K., Moriguchi, S., and Goto, M.: Formalization of a surface subdivision allowing a region with holes without coordinates, *11th International Workshop on Automated Deduction in Geometry (ADG2016)*, 2016, pp. 190–207.

[16] Tosue, M. and Takahashi, K.: Towards a qualitative reasoning on shape change and object division, *14th International Conference on Spatial Information Theory (COSIT 2019)*, 2019, pp. 7:1–7:15.

[17] 高橋和子，山下拓真，今井宜洋: 定理証明支援系による曲線の定性表現手法の形式化と証明，日本ソフトウェア科学会第 *30* 回大会, 2025.