項書き換えシステムに対する逆書き換えの停止性と合流性

岩見 宗弘

先行研究 (岩見 2026) の主定理の条件を単純化順序による大小関係で置き換え，非循環性を取り除いて改良したものを，本論文の主定理として示す．この定理では，組合せ子に対する項書き換えシステムだけではなく，一般的な項書き換えシステムの逆書き換えの停止性を示すことができる．また，先行研究では扱っていない組合せ子に対する項書き換えシステムの停止性を示す．さらに，これらの逆書き換えの停止性を示す．最後に，これらの逆書き換えの合流性を反証する．本研究では，先行研究とは異なり，すべて項書き換えシステムの枠組みを用いて証明する．本研究は現在進行中のものである．

1 はじめに

項書き換えシステムは，方向付けられた等式，すなわち，書き換え規則に基づいた計算モデルである [16]．組合せ子は適用演算子を関数記号としてもつ項書き換えシステムとみなすことができる [16]．この計算モデルにおいて，停止性と合流性は重要な性質である．

本論文では，書き換え規則が 1 つ以上の項書き換えシステムを考える．項書き換えシステムの停止性は，一般に決定不能である [2]．項書き換えシステムの合流性は，一般に決定不能である [2]．

文献 [5] では，様々な組合せ子に対する逆書き換えの停止性と合流性について研究が行われている．

本論文では，不動点組合せ子と多重不動点を議論する際に使用される組合せ子 [14] を扱う．これらの組合せ子は文献 [5] では扱っていない．

文献 [5] の主定理の条件を単純化順序による大小関係で置き換え，非循環性を取り除いて改良したものを，本論文の主定理として示す．この定理では，組合せ子に対する項書き換えシステムだけではなく，一般的な項書き換えシステムの逆書き換えの停止性を示すことができる．また，文献 [5] では扱っていない組合せ子に対する項書き換えシステムの停止性を示す．さらに，これらの逆書き換えの停止性を示す．最後に，これらの逆書き換えの合流性を反証する．本研究では，文献 [5] とは異なり，すべて項書き換えシステムの枠組みを用いて証明する．

本論文で扱う組合せ子の書き換え規則と項書き換えシステムは表 1 にまとめる．これらの項書き換えシステムの停止性は表 2 にまとめる．組合せ子の逆書き換えは表 3 にまとめる．組合せ子の逆書き換えの停止性と合流性は表 4 にまとめる．表 1 の組合せ子は文献 [14] で紹介されているものである．表 2, 4 中の AProVE, TTT2, Mu-term は停止性検証ツールである [3] [10] [7]．CONF は CONFident の略記である．CONFident, CSI, ACP は合流性検証ツールである [6] [9] [1]．

本論文の構成は以下の通りである．第 2 節では，項書き換えシステムの定義や記法を述べる．第 3 節では，組合せ子に対する項書き換えシステムの停止性について述べる．第 4 節では，項書き換えシステムに対する逆書き換えの停止性について述べる．第 5 節

---

* Termination of Inverse Reduction for Term Rewriting Systems.

This is an unrefereed paper. Copyrights belong to the Author(s).

Munehiro Iwami, 岩手県立大学ソフトウェア情報学部, Faculty of Software and Information Science, Iwate Prefectural University.

では，組合せ子に対する項書き換えシステムの合流性について述べる．第 6 節では，まとめと今後の課題について述べる．

2 準備

本節では，項書き換えシステムの定義について述べる．本論文の定義や記法は文献 [4] [5] [12] [16] [8] に基づいている．

関数記号の集合を Σ で，**変数**の加算無限集合を $\mathcal{V}$ でそれぞれ表す ($\Sigma \cap \mathcal{V} = \emptyset$)．各関数記号は**項数** ≥ 0 を備えている．項数 0 の関数記号を**定数**とよぶ．項数 n の関数記号の集合を Σ_n とする．Σ 上の項の集合 $T(\Sigma, \mathcal{V})$ を次の通り定義する：(1) $\mathcal{V} \subseteq T(\Sigma, \mathcal{V})$，(2) $f \in \Sigma_n$ かつ $t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma, \mathcal{V})$ ならば，$f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\Sigma, \mathcal{V})$．変数を含まない項を**基礎項**とよぶ．基礎項の集合を $T(\Sigma)$ により表す．項 t の**サイズ** $|t|$ を t に出現する関数記号と変数の個数とする．$\Box \notin \Sigma \cup \mathcal{V}$ を特別な定数記号とし，**ホール**とよぶ．**文脈**は $T(\Sigma \cup \{\Box\}, \mathcal{V})$ に属する項である．文脈 C が 1 つだけ $\Box$ を含むとき，$C[\,]$ により表す．$C[t]$ は C のホールを t により置き換えた項を表す．t に属する変数の集合を $\mathcal{V}(t)$ により表す．各変数が 1 回出現する項を**線形**という．**代入** σ は，$dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \neq x\}$ が有限である $\mathcal{V}$ から $T(\Sigma, \mathcal{V})$ への写像である．任意の代入 σ は，$f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\Sigma, \mathcal{V})$ に対して $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$ を満たす写像 $\sigma : T(\Sigma, \mathcal{V}) \to T(\Sigma, \mathcal{V})$ へ拡張できる．以降では，$\sigma(t)$ の代わりに $t\sigma$ と書く．任意の文脈 C に対して，$s\,R\,t$ ならば $C[s]\,R\,C[t]$ のとき，項上の二項関係 R は**文脈に関して閉じている**という．任意の代入 σ に対して，$s\,R\,t$ ならば $s\sigma\,R\,t\sigma$ のとき，項上の二項関係 R は**代入に関して閉じている**という．項上の**書き換え関係**は，文脈と代入に関して閉じている項上の二項関係である．**書き換え規則** $l \to r$ は $T(\Sigma, \mathcal{V})$ 上の方向付けられた等式であり，$l \notin \mathcal{V}$ かつ $\mathcal{V}(l) \subseteq \mathcal{V}(r)$ を満たす．**項書き換えシステム** (TRS) は書き換え規則の集合である．TRS $\mathcal{R}$ による s から t への**書き換えステップ**または**リダクションステップ**は，ある代入 σ，文脈 $C[\,]$，書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ が存在し，$s = C[l\sigma]$ かつ $t = C[r\sigma]$ を満たすとき定義される．これを $s \to_{\mathcal{R}} t$ と表す．$s \to_{\mathcal{R}} t$ の**逆書き換え**を $t \leftarrow_{\mathcal{R}} s$ または $s {\to_{\mathcal{R}}}^{-1} t$ と表す．項 $l\sigma$ を**リデックス**とよぶ．書き換え規則 $l \to r$ に対して，l が線形ならば**左線形**とよぶ．任意の書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ が左線形のとき，$\mathcal{R}$ を左線形とよぶ．また，$\mathcal{R}$ の書き換え規則の間に重なりがないとき，左線形 TRS $\mathcal{R}$ は**直交**であるとよぶ．任意の書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ に対して $\mathcal{V}(l) = \mathcal{V}(r)$ のとき，$\mathcal{R}$ は**非消去**であるとよぶ．任意の書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ に対して $r \notin \mathcal{V}$ のとき，$\mathcal{R}$ は**非縮退**であるとよぶ．$\to$ を書き換えステップとする．$\to$ の推移的閉包を $\to^+$ で表し，$\to$ の反射推移的閉包を $\to^*$ で表す．無限書き換え列 $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} t_2 \to_{\mathcal{R}} \cdots$ が存在しないとき，TRS $\mathcal{R}$ は**停止性をもつ**という．$s \to_{\mathcal{R}} t$ なる $t \in T(\Sigma, \mathcal{V})$ が存在しないとき，項 $s \in T(\Sigma, \mathcal{V})$ が $\mathcal{R}$ に関して**正規形**であるという．$\mathcal{R}$ に関する正規形の集合を $NF(\mathcal{R})$ と表す．任意の $s, t, u \in T(\Sigma, \mathcal{V})$ に対して，$t \leftarrow^*_{\mathcal{R}} s \to^*_{\mathcal{R}} u$ のとき，$v \in T(\Sigma, \mathcal{V})$ が存在して，$t \to^*_{\mathcal{R}} v \leftarrow^*_{\mathcal{R}} u$ を満たすとき，$\mathcal{R}$ は**合流性をもつ**という．書き換え列 $t \to^+_{\mathcal{R}} t$ が存在しないとき，$\mathcal{R}$ は**非循環性をもつ**という．

半順序 $>$ は非反射的かつ推移的な関係である．集合 A 上の半順序 $>$ が**整礎**であるとは，A の要素の無限減少列 $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$ が存在しないときをいう．半順序でもある書き換え関係を**書き換え順序**とよぶ．整礎な書き換え順序を**リダクション順序**とよぶ．任意の書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ に対して $l > r$ が成り立つとき，TRS $\mathcal{R}$ と $T(\Sigma, \mathcal{V})$ 上の半順序 $>$ が**適合**するという．

本論文では，関数記号の集合 Σ が有限の場合のみ考える．

3 組合せ子に対する TRS の停止性

本節では，非消去かつ非縮退な組合せ子 $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ に対する TRS $\mathcal{R}(\{Z_1, \ldots, Z_n\})$ が停止性をもたないことを示す．本節の結果は表 2 にまとめる．

組合せ子 $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ に対して，定数 $Z_1, \ldots, Z_n$ と項数 2 の関数記号@からなる集合を $T(\Sigma_{\{Z_1, \ldots, Z_n\}})$

表 1　組合せ子に対する書き換え規則と項書き換えシステム

番号	組合せ子	書き換え規則	項書き換えシステム
1	Y	$\mathsf{Y}x \to x(\mathsf{Y}x)$	$@(\mathsf{Y}, x) \to @(x, @(\mathsf{Y}, x))$
2	$\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$	$\mathsf{M}_1xy \to x(\mathsf{M}_1xy)(\mathsf{M}_2xy)$	$@(@(\mathsf{M}_1, x), y) \to @(@(x, @(@(\mathsf{M}_1, x), y)), @(@(\mathsf{M}_2, x), y))$
		$\mathsf{M}_2xy \to y(\mathsf{M}_1xy)(\mathsf{M}_2xy)$	$@(@(\mathsf{M}_2, x), y) \to @(@(y, @(@(\mathsf{M}_1, x), y)), @(@(\mathsf{M}_2, x), y))$
3	$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2$	$\mathsf{A}_1zwxy \to$	$@(@(@(@(\mathsf{A}_1, z), w), x), y) \to$
		$x(wzxy)(zwzxy)$	$@(@(x, @(@(@(@(w, z), w), x), y)), @(@(@(@(z, w), z), x), y))$
		$\mathsf{A}_2zwxy \to$	$@(@(@(@(\mathsf{A}_2, z), w), x), y) \to$
		$y(zwzxy)(wzwxy)$	$@(@(y, @(@(@(@(z, w), z), x), y)), @(@(@(@(w, z), w), x), y))$
4	$\mathsf{n}_1, \mathsf{n}_2$	$\mathsf{n}_1wzxy \to$	$@(@(@(@(\mathsf{n}_1, w), z), x), y) \to$
		$z(wxxy)(wyxy)$	$@(@(z, @(@(@(w, x), x), y)), @(@(@(w, y), x), y))$
		$\mathsf{n}_2wzxy \to$	$@(@(@(@(\mathsf{n}_2, w), z), x), y) \to$
		$z(wwxxy)(wwyxy)$	$@(@(z, @(@(@(@(w, w), x), x), y)), @(@(@(@(w, w), y), x), y))$
5	$\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2$	$\mathsf{s}_1wxy \to$	$@(@(@(\mathsf{s}_1, w), x), y) \to$
		$x(wxy)(wyx)$	$@(@(x, @(@(w, x), y)), @(@(w, y), x))$
		$\mathsf{s}_2wxy \to$	$@(@(@(\mathsf{s}_2, w), x), y) \to$
		$x(wwxy)(wwyx)$	$@(@(x, @(@(@(w, w), x), y)), @(@(@(w, w), y), x))$
6	$\mathsf{O}_1, \mathsf{O}_2$	$\mathsf{O}_1zwxy \to$	$@(@(@(@(\mathsf{O}_1, z), w), x), y) \to$
		$x(zxy)(wxy)$	$@(@(x, @(@(z, x), y)), @(@(w, x), y))$
		$\mathsf{O}_2zwxy \to$	$@(@(@(@(\mathsf{O}_2, z), w), x), y) \to$
		$y(zxy)(wxy)$	$@(@(y, @(@(z, x), y)), @(@(w, x), y))$

表 2　組合せ子に対する項書き換えシステムの停止性

番号	組合せ子	停止性	停止性検証ツール		
			AProVE	TTT2	Mu-term
1	Y	×	○	–	–
2	$\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$	×	○	–	–
3	$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2$	×	○	–	–
4	$\mathsf{n}_1, \mathsf{n}_2$	×	○	–	–
5	$\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2$	×	○	–	–
6	$\mathsf{O}_1, \mathsf{O}_2$	?	?	?	?

(○：成立 (本研究)，×：不成立 (本研究)，?：未解決，–：未実行)

により表す. 特に，$n = 1$ のとき，組合せ子 $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ は単に Z と表す.

組合せ子論理の書き換えシステムは，$T(\Sigma_{\{Z_1,\ldots,Z_n\}})$ 上の TRS $\mathcal{R}(\{Z_1, \ldots, Z_n\}) = \{@(\ldots@(@(Z_i, x_1), x_2), \ldots, x_{M_{Z_i}} \to e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ とする [4][11]. ここで，e_i は@とある $M_{Z_i} > 1$ に対して変数 $x_1, \ldots, x_{M_{Z_i}}$ のみから構成される項である †1.

†1 組合せ子 $Z \in \{\mathsf{Y}, \Gamma, \mathsf{s}, \mathsf{N}\}$ に対して，e_i は Z, @と変数 $x_1, \ldots, x_{M_Z}$ から構成される項である．組合せ子 $\{\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2\}$ に対して，e_i は $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$, @と変数

表 3　組合せ子に対する逆書き換え

番号	組合せ子	項書き換えシステムに対する逆書き換え
1	Y	$@(x, @(\mathsf{Y}, x)) \to @(\mathsf{Y}, x)$
2	$\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$	$@(@(x, @(@(\mathsf{M}_1, x), y)), @(@(\mathsf{M}_2, x), y)) \to @(@(\mathsf{M}_1, x), y)$
		$@(@(y, @(@(\mathsf{M}_1, x), y)), @(@(\mathsf{M}_2, x), y)) \to @(@(\mathsf{M}_2, x), y)$
3	$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2$	$@(@(x, @(@(@(@(w, z), w), x), y)), @(@(@(@(z, w), z), x), y))$
		$\to @(@(@(@(\mathsf{A}_1, z), w), x), y)$
		$@(@(y, @(@(@(@(z, w), z), x), y)), @(@(@(@(w, z), w), x), y))$
		$\to @(@(@(@(\mathsf{A}_2, z), w), x), y)$
4	$\mathsf{n}_1, \mathsf{n}_2$	$@(@(z, @(@(@(w, x), x), y)), @(@(@(w, y), x), y))$
		$\to @(@(@(@(\mathsf{n}_1, w), z), x), y)$
		$@(@(z, @(@(@(@(w, w), x), x), y)), @(@(@(@(w, w), y), x), y))$
		$\to @(@(@(@(\mathsf{n}_2, w), z), x), y)$
5	$\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2$	$@(@(x, @(@(w, x), y)), @(@(w, y), x))$
		$\to @(@(@(\mathsf{s}_1, w), x), y)$
		$@(@(x, @(@(@(w, w), x), y)), @(@(@(w, w), y), x))$
		$\to @(@(@(\mathsf{s}_2, w), x), y)$
6	$\mathsf{O}_1, \mathsf{O}_2$	$@(@(x, @(@(z, x), y)), @(@(w, x), y))$
		$\to @(@(@(@(\mathsf{O}_1, z), w), x), y)$
		$@(@(y, @(@(z, x), y)), @(@(w, x), y))$
		$\to @(@(@(@(\mathsf{O}_2, z), w), x), y)$

表 4　組合せ子に対する逆書き換えの停止性と合流性

番号	組合せ子	停止性	合流性	停止性検証ツール			合流性検証ツール		
				AProVE	TTT2	Mu-term	CONF	CSI	ACP
1	Y	○	×	○	–	–	×	–	–
2	$\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$	○	×	○	–	–	×	–	–
3	$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2$	○	×	○	–	–	×	–	–
4	$\mathsf{n}_1, \mathsf{n}_2$	○	×	○	○	○	?	×	×
5	$\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2$	○	×	○	–	–	?	×	×
6	$\mathsf{O}_1, \mathsf{O}_2$	○	×	○	○	○	×	–	–

(○：成立 (本研究)，×：不成立 (本研究)，?：未解決，–：未実行)

定理 1. 組合せ子 $Z \in \{\mathsf{Y}, \{\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2\}, \{\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2\}, \{\mathsf{n}_1, \mathsf{n}_2\}, \{\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2\}\}$ に対して，TRS $\mathcal{R}(Z)$ は停止性をもたない．

(証 明) (1) $C[\,] = @(\mathsf{Y}, \Box)$ とすると，$@(\mathsf{Y}, \mathsf{Y}) \to_{\mathcal{R}(\mathsf{Y})} C[@(\mathsf{Y}, \mathsf{Y})]$．よって，$\mathcal{R}(\mathsf{Y})$ は停止性をもたない．

(2) $C[\,] = @(@(\mathsf{M}_1, \Box), @(@(\mathsf{M}_2, \mathsf{M}_1), \mathsf{M}_1))$ とすると，$@(@(\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_1), \mathsf{M}_1) \to C[@(@(\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_1), \mathsf{M}_1)]$．よって，$\mathcal{R}(\{\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2\})$ は停止性をもたない．

(3) $C[\,] = @(@(\mathsf{A}_1, \Box),$

$x_1, \ldots, x_{M_{\mathsf{M}_i}}$ から構成される項である．

$@(@(@(@(\mathsf{A}_1,\mathsf{A}_1),\mathsf{A}_1),\mathsf{A}_1),\mathsf{A}_1))$ とすると，

$$@(@(@(@(\mathsf{A}_1,\mathsf{A}_1),\mathsf{A}_1),\mathsf{A}_1),\mathsf{A}_1)$$
$$\to_{\mathcal{R}(\{\mathsf{A}_1,\mathsf{A}_2\})} \quad C[@(@(@(@(\mathsf{A}_1,\mathsf{A}_1),\mathsf{A}_1),\mathsf{A}_1),\mathsf{A}_1)]$$

よって，$\mathcal{R}(\{\mathsf{A}_1,\mathsf{A}_2\})$ は停止性をもたない．

(4) $C[\,] = @(@(\mathsf{n}_2,\Box),$
$@(@(@(@(\mathsf{n}_2,\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_2))$ とすると，

$$@(@(@(@(\mathsf{n}_2,\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_2)$$
$$\to_{\mathcal{R}(\{\mathsf{n}_1,\mathsf{n}_2\})} \quad C[@(@(@(@(\mathsf{n}_2,\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_2)]$$

よって，$\mathcal{R}(\{\mathsf{n}_1,\mathsf{n}_2\})$ は停止性をもたない．

(5) $C[\,] = @(@(\mathsf{s}_2,\Box),@(@(@(\mathsf{s}_2,\mathsf{s}_2),\mathsf{s}_2),\mathsf{s}_2))$ とすると，

$$@(@(@(\mathsf{s}_2,\mathsf{s}_2),\mathsf{s}_2),\mathsf{s}_2)$$
$$\to_{\mathcal{R}(\{\mathsf{s}_1,\mathsf{s}_2\})} \quad C[@(@(@(\mathsf{s}_2,\mathsf{s}_2),\mathsf{s}_2),\mathsf{s}_2)]$$

よって，$\mathcal{R}(\{\mathsf{s}_1,\mathsf{s}_2\})$ は停止性をもたない． □

TRS $\mathcal{R}(\{\mathsf{O}_1,\mathsf{O}_2\})$ が停止性をもつかどうかは不明である [3] [10] [7].

表 1 中の項書き換えシステムは直交であるから，合流性をもつ [2].

以下では，本論文で扱う組合せ子について説明する．Y は不動点組合せ子である．任意の a_1,a_2 に対して，$a_1b_1b_2 = b_1$ かつ $a_2b_1b_2 = b_2$ を満たす b_1,b_2 が存在するとき，組 (b_1,b_2) を (a_1,a_2) の**二重不動点**とよぶ [14]．TRS $\mathcal{R}(\{\mathsf{M}_1,\mathsf{M}_2\})$ は，**二重 Myhill 性**を定義する際に使用する組合せ子 $\mathsf{M}_1,\mathsf{M}_2$ が満たすべき 2 つの等式を表す [14]．二重不動点と二重 Myhill 性を議論するために，組合せ子 $\{\mathsf{A}_1,\mathsf{A}_2\},\{\mathsf{O}_1,\mathsf{O}_2\}$ は使用される．$\mathsf{N}zxy \to z(\mathsf{N}xxy)(\mathsf{N}yxy)$ を**良組合せ子**という [14]．$\mathsf{s}xy \to x(\mathsf{s}xy)(\mathsf{s}yx)$ を**対称組合せ子**という [14]．良組合せ子は n_2 から構成され，n_1 のすべての不動点は良組合せ子である．対称組合せ子は s_2 から構成され，s_1 のすべての不動点は対称組合せ子である．

4 TRS に対する逆書き換えの停止性

本節では，TRS に対する逆書き換えの停止性を示すための十分条件を与える．この十分条件は組合せ子に対する TRS 以外にも適用できる．本節では，縮退または消去な TRS $\mathcal{R}$ も考える．

任意の文脈 $C \neq \Box$ と $t \in T(\Sigma,\mathcal{V})$ に対して $C[t]\ R\ t$ が成り立つとき，$T(\Sigma,\mathcal{V})$ 上の二項関係 R が**部分項性をもつ**という [8]．また，$Emb(\Sigma) = \{f(x_1,\ldots,x_n) \to x_i \mid f \in \Sigma, i \in \{1,\ldots,n\}\}$ とする．$\rhd_{emb} = \to^+_{Emb(\Sigma)}$ とし，$\trianglerighteq_{emb} = \to^*_{Emb(\Sigma)}$ とする．関係 $\trianglerighteq_{emb}$ を**埋め込み**という [8].

命題 2. ([8]) $T(\Sigma,\mathcal{V})$ 上の書き換え順序 $>$ が部分項性をもつことは，$\rhd_{emb} \subseteq >$ が成り立つことと同値である．

定義 3. ([8]) **単純化順序**は，部分項性をもつ書き換え順序である．$T(\Sigma,\mathcal{V})$ 上の単純化順序に関して TRS $\mathcal{R}$ が適合するとき，$\mathcal{R}$ は**単純停止性をもつ**という．

命題 4. ([8]) 任意の単純停止性をもつ TRS は，停止性をもつ．

補題 5. $\mathcal{R}$ を *TRS* とする．このとき，$\to_{\mathcal{R}}$ が非循環性をもつことと，$\leftarrow_{\mathcal{R}}$ が非循環性をもつことは同値である．

(証明) $\leftarrow_{\mathcal{R}}$ が循環性をもつと仮定する．書き換え列 $t \leftarrow^+_{\mathcal{R}} t$ が存在する．よって，$t \to^+_{\mathcal{R}} t$．したがって，$\to_{\mathcal{R}}$ が非循環性をもつことに矛盾する．次に，$\to_{\mathcal{R}}$ が循環性をもつと仮定する．書き換え列 $t \to^+_{\mathcal{R}} t$ が存在する．よって，$t \leftarrow^+_{\mathcal{R}} t$．したがって，$\leftarrow_{\mathcal{R}}$ が非循環性をもつことに矛盾する． □

補題 6. $\mathcal{R}$ を TRS とする．$\mathcal{R}$ が単純停止性をもつならば，逆書き換え $\leftarrow_{\mathcal{R}}$ は非循環性をもつ．

(証明)

$\mathcal{R}$ が単純停止性をもつ
$\Leftrightarrow$ $\to_{\mathcal{R}\cup Emb(\Sigma)}$ が停止性をもつ
$\Leftrightarrow$ $\to_{\mathcal{R}\cup Emb(\Sigma)}$ が非循環性をもつ ([8])
$\Leftrightarrow$ $\leftarrow_{\mathcal{R}\cup Emb(\Sigma)}$ が非循環性をもつ (補題 5)
$\Rightarrow$ $\leftarrow_{\mathcal{R}}$ が非循環性をもつ

□

文献 [5] における主定理を TRS の枠組みで書き直したものが以下の命題である．この命題は任意の 1 つの組合せ子 Z に対して成り立つ．すなわち，TRS $\mathcal{R}(Z)$ は 1 つの書き換え規則だけからなる．

命題 7. ([5]) 組合せ子 Z が次の 2 つの条件を満たすとする．(1) 任意の $s,t \in T(\Sigma_Z)$ に対して，$\mathcal{R}(Z)$ ならば $|s| \leq |t|$．(2) $T(\Sigma_Z)$ 上で $\mathcal{R}(Z)$ が非循環性をもつ．このとき，$T(\Sigma_Z)$ 上で $\mathcal{R}(Z)$ の逆書き換え $\leftarrow_{\mathcal{R}(Z)}$ は停止性をもつ．

命題 7 の条件 (1) の項のサイズに関する大小関係を単純化順序による大小関係に置き換え，条件 (2) を取

り除いたものが，本論文の主定理である．以下の定理は，TRS $\mathcal{R}$ の書き換え規則が 2 つ以上の場合も成り立つ．さらに，組合せ子からなる TRS である必要もなく，一般の TRS において成り立つ．

定理 8. $\mathcal{R}$ を TRS とする．$>$ を単純化順序とする．任意の $l \to r \in \mathcal{R}$ に対して $l < r$ ならば，逆書き換え $\leftarrow_{\mathcal{R}}$ が停止性をもつ．

(証明) 無限逆書き換え列 $t_0 \leftarrow_{\mathcal{R}} t_1 \leftarrow_{\mathcal{R}} t_2 \leftarrow_{\mathcal{R}} \cdots$ が存在すると仮定する．任意の $t_i \leftarrow_{\mathcal{R}} t_{i+1}$ に対して，$t_{i+1} \to_{\mathcal{R}} t_i$ より，$t_{i+1} = C[l\sigma]$ かつ $t_i = C[r\sigma]$ を満たす $l \to r \in \mathcal{R}, C[\,], \sigma$ が存在する．$>$ は代入と文脈に関して閉じているから，$t_{i+1} = C[l\sigma] < C[r\sigma] = t_i$. このとき，$t_0 > t_1 > t_2 > \cdots$．$>$ は整礎であるから，矛盾する． □

命題 9. ([12]) Σ が有限ならば，$T(\Sigma, \mathcal{V})$ 上の再帰経路順序 (rpo) は単順化順序である．

命題 10. ([12]) Σ が有限ならば，$T(\Sigma, \mathcal{V})$ 上の辞書式経路順序 (lpo) は単順化順序である．

命題 11. ([13] [15]) Σ が有限ならば，$T(\Sigma, \mathcal{V})$ 上の改良再帰分解順序 (ird) は単順化順序である．

$Z \in \{\Gamma, \mathsf{s}\}$ とする．TRS $\mathcal{R}(Z)$ の逆書き換え $\leftarrow_{\mathcal{R}(Z)}$ が $T(\Sigma_Z)$ 上で停止性をもつことは，文献 [5] で示されている．しかしながら，本研究の主定理でも示すことができる．

例 12. TRS $\mathcal{R}(\Gamma) = \{@(@(x,y), @(@(\Gamma,x),y)) \to @(@(\Gamma,x),y)\}$ とする．$@(@(\Gamma,x),y) <_{rpo} @(@(x,y), @(@(\Gamma,x),y))$ より，定理 8 から，逆書き換え $\leftarrow_{\mathcal{R}(\Gamma)}$ は停止性をもつ．

TRS $\mathcal{R}(\mathsf{s}) = \{@(@(\mathsf{s},x),y) \to @(@(x, @(@(\mathsf{s},x),y)), @(@(\mathsf{s},y),x))\}$ とする．$@(@(\mathsf{s},x),y) <_{rpo} @(@(x, @(@(\mathsf{s},x),y)), @(@(\mathsf{s},y),x))$ より，定理 8 から，逆書き換え $\leftarrow_{\mathcal{R}(\mathsf{s})}$ は停止性をもつ．

以下の例では，本研究の主定理を用いて，組合せ子からなる TRS 以外の逆書き換えの停止性を示す．

例 13. ([15]) TRS

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{lcl} y \supset (x \vee z) & \to & (\neg x) \supset (y \supset z) \\ y \supset (x \wedge y) & \to & (\neg x) \supset (\neg y) \end{array} \right\}$$

を考える．$l_1 = y \supset (x \vee z), r_1 = (\neg x) \supset (y \supset z)$ とし，$l_2 = y \supset (x \wedge y), r_2 = (\neg x) \supset (\neg y)$ とする．このとき，$l_1 \not<_{rpo} r_1$ かつ $l_2 \not<_{rpo} r_2$ である．さらに，$l_1 \not<_{lpo} r_1$ かつ $l_2 \not<_{lpo} r_2$ である．しかしながら，$l_1 <_{ird} r_1$ かつ $l_2 <_{ird} r_2$ より，定理 8 から，$\mathcal{R}$ の逆書き換え $\leftarrow_{\mathcal{R}}$ は停止性をもつ．

例 14. ([13]) TRS

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R} & = & \{h(a(z), g(a(x), b(y)), g(a(x), b(y))) \\ & \to & h(a(z), g(a(a(x)), x), g(b(b(y)), y))\} \end{array}$$

を考える．$l = h(a(z), g(a(x), b(y)), g(a(x), b(y)))$, $r = h(a(z), g(a(a(x)), x), g(b(b(y)), y))$ とする．このとき，$l \not<_{rpo} r$ かつ $l \not<_{lpo} r$ である．しかしながら，$l <_{ird} r$ より，定理 8 から，$\mathcal{R}$ の逆書き換え $\leftarrow_{\mathcal{R}}$ は停止性をもつ．

以下の定理の結果は，表 4 にまとめる．

定理 15. 組合せ子 $Z \in \{\mathsf{Y}, \{\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2\}, \{\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2\}, \{\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2\}\}$ に対して，TRS $\mathcal{R}(Z)$ の逆書き換え $\leftarrow_{\mathcal{R}(\mathsf{Y})}$ は停止性をもたない．

(証明) (1) $@(\mathsf{Y}, x) <_{rpo} @(x, @(\mathsf{Y}, x))$ より，定理 8 から逆書き換え $\leftarrow_{\mathcal{R}(\mathsf{Y})}$ は停止性をもつ．

(2) $@(@(\mathsf{M}_1, x), y) <_{rpo} @(@(x, @(@(\mathsf{M}_1, x), y)), @(@(\mathsf{M}_2, x), y))$ かつ $@(@(\mathsf{M}_2, x), y) <_{rpo} @(@(y, @(@(\mathsf{M}_1, x), y)), @(@(\mathsf{M}_2, x), y))$ より，定理 8 から逆書き換え $\leftarrow_{\mathcal{R}(\{\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2\})}$ は停止性をもつ．

(3) $@(@(@(@(\mathsf{A}_1, z), w), x), y) <_{rpo} @(@(x, @(@(@(@(w, z), w), x), y)), @(@(@(@(z, w), z), x), y)), @(@(@(@(\mathsf{A}_2, z), w), x), y) <_{rpo} @(@(y, @(@(@(@(z, w), z), x), y)), @(@(@(@(w, z), w), x), y))$ より，定理 8 から逆書き換え $\leftarrow_{\mathcal{R}(\{\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2\})}$ は停止性をもつ．

(4) $@(@(@(\mathsf{s}_1, w), x), y) <_{rpo} @(@(x, @(@(w, x), y)), @(@(w, y), x)), @(@(@(\mathsf{s}_2, w), x), y) <_{rpo} @(@(x, @(@(@(w, w), x), y)), @(@(@(w, w), y), x))$ より，定理 8 から逆書き換え $\leftarrow_{\mathcal{R}(\{\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2\})}$ は停止性をもつ．□

$\mathcal{R}(\mathsf{Y})$ の逆書き換えが停止性をもつことは，文献 [5] の手法で示すことができる．しかしながら，$\mathcal{R}(\{\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2\}), \mathcal{R}(\{\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2\}), \mathcal{R}(\{\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2\})$ の逆書き換えが停止性をもつことは，文献 [5] の手法では示すことができない．

再帰経路順序や辞書式経路順序等では，組合せ子 $Z \in \{\{\mathsf{O}_1, \mathsf{O}_2\}, \{\mathsf{n}_1, \mathsf{n}_2\}\}$ に対する TRS $\mathcal{R}(Z)$ の任意の書き換え規則の右辺が左辺よりも大きいことが示せず，定理 8 は適用できない．しかしながら，こ

れらの TRS の逆書き換えは停止性をもつことが，AProVE，TTT2，Mu-term [3] [10] [7] によりそれぞれ示せる．

5 非消去かつ非縮退な組合せ子に対する逆 TRS の合流性

本節では，非消去かつ非縮退な組合せ子 $\{Z_1,\ldots,Z_n\}$ に対する逆 TRS $\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})^{-1}$ が合流性をもたないことを示す．本節の結果は表 3 にまとめる．

TRS $\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})$ の逆関係 $\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})^{-1}$ を次の通り定義する：$\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})^{-1} = \{r \to l \mid l \to r \in \mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})\}$．組合せ子 $\{Z_1,\ldots,Z_n\}$ が非消去かつ非縮退であれば，$\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})^{-1}$ は TRS である．このとき，$\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})^{-1}$ を $\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})$ の**逆 TRS** という．$t \to_{\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})} u$ ならば $u \leftarrow_{\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})} t$．このとき，$\leftarrow_{\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})}$ を $\to^{-1}_{\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})}$ と表す．逆 TRS $\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})^{-1}$ の定義から，$\to^{-1}_{\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})} = \to_{\mathcal{R}(\{Z_1,\ldots,Z_n\})^{-1}}$．

定理 16. 組合せ子 $Z \in \{\mathsf{Y}, \{\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2\}, \{\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2\}, \{\mathsf{O}_1, \mathsf{O}_2\}, \{\mathsf{n}_1, \mathsf{n}_2\}, \{\mathsf{s}_1, \mathsf{s}_2\}\}$ に対して，逆 TRS $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ は合流性をもたない．

(証明) 逆 TRS $\mathcal{R}^{-1}(Z)$ に対して，$NF(\mathcal{R}(Z)^{-1}) \ni t \leftarrow^{+}_{\mathcal{R}(Z)^{-1}} s \to^{+}_{\mathcal{R}(Z)^{-1}} u \in NF(\mathcal{R}(Z)^{-1})$ かつ $t \neq u$ を満たす項 $s, t, u \in T(\Sigma_Z)$ が存在することを示す．証明の詳細は表 5 にまとめる． □

6 まとめと今後の課題

本論文では，先行研究における岩見の結果を，項書き換えシステムに対して改良した定理を与えた．最初に，5 例の組合せ子の停止性を示した．次に，この定理を用いて 4 例の組合せ子に対する逆書き換えの停止性を示した．最後に，6 例の組合せ子に対する逆書き換えの合流性を反証した．

今後の課題は，停止性が未解決である 1 例の組合せ子の停止性を明らかにすることである．また，本論文の定理が有用である組合せ子以外の項書き換えシステムの例をさらに与えることである．

参 考 文 献

[1] Aoto, T. : ACP, ARIWEB, https://ari-web.uibk.ac.at/

[2] Baader, F. and Nipkow, T., *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.

[3] Giesl, J. et al. : AProVE (AUTOMATED PROGRAM VERIFICATION ENVIRONMENT), Web Interface, https://aprove.informatik.rwth-aachen.de/

[4] Iwami, M. and Nakano, K., Disproving Termination of O and S-like Combinators by Tree Automata, *Journal of Information Processing*, Vol.34, 2026, pp.39–44.

[5] 岩見宗弘, 様々な組合せ子に対する逆書き換えの停止性と合流性，情報処理学会論文誌プログラミング，掲載予定.

[6] Lucas, S. et al. : CONFident (Confluence Checker for Conditional Rewrite Systems), Web Interface, http://zenon.dsic.upv.es/confident/

[7] Lucas, S. et al. : Mu-term (Verify termination properties automatically), Web Interface, http://zenon.dsic.upv.es/muterm/index.php/web-interface/

[8] Middeldorp, A. and Zantema, H., Simple termination of rewrite systems, *Theoretical Computer Science*, Vol. 175, 1997, pp.127–158.

[9] Middeldorp, A. et al. : CSI, Web Interface, http://138.232.18.220/tool/csi

[10] Middeldorp, A. et al. : TTT2, Web Interface, http://138.232.18.220/tool/ttt2

[11] Nakano, K. and Iwami, M. : Disproving termination of non-erasing sole combinatory calculus with tree automata, *Proc. of the 28th International Conf. on Implementation and Application of Automata*, CIAA 2024, LNCS, 15015, Springer-Verlag, 2024, pp.261–275.

[12] Ohlebusch, E., *Advanced Topics in Term Rewriting*, Springer, 2002.

[13] Rusinowitch, M. : Path of subterms ordering and recursive decomposition ordering revisited, *Journal of Symbolic Computation*, Vol.3, Issues1–2, 1987, pp.117–131.

[14] Smullyan, R. : *Diagonalization and Self-Reference*, Oxford University Press, 1994.

[15] Steinbach, J. : *Termination of rewriting – Extensions, comparison and automatic generation of simplification orderings*, PhD thesis, Univ. of Kaiserslautern, 1994.

[16] Terese, *Term Rewriting Systems*, Cambridge University Press, 2003.

表 5　組合せ子に対する逆 TRS の合流性反証

番号	組合せ子	t	s	u
1	Y	$@(\mathsf{Y},\mathsf{Y})$	$@(@(\mathsf{Y},\mathsf{Y}),@(\mathsf{Y},@(\mathsf{Y},\mathsf{Y})))$	$@(@(\mathsf{Y},\mathsf{Y}),@(\mathsf{Y},\mathsf{Y}))$
2	$\mathsf{M}_1,\mathsf{M}_2$	$@(@(\mathsf{M}_1,\mathsf{M}_1),\mathsf{M}_1)$	$@(@(\mathsf{M}_1,@(@(\mathsf{M}_1,\mathsf{M}_1),\mathsf{M}_1)),$ $@(@(\mathsf{M}_2,\mathsf{M}_1),\mathsf{M}_1))$	$@(@(\mathsf{M}_2,\mathsf{M}_1),\mathsf{M}_1)$
3	$\mathsf{A}_1,\mathsf{A}_2$	$@(@(@(@(\mathsf{A}_1,\mathsf{A}_2),$ $\mathsf{A}_1),\mathsf{A}_2),\mathsf{A}_2)$	$@(@(\mathsf{A}_2,@(@(@(@(\mathsf{A}_1,\mathsf{A}_2),\mathsf{A}_1),\mathsf{A}_2),\mathsf{A}_2)),$ $@(@(@(@(\mathsf{A}_2,\mathsf{A}_1),\mathsf{A}_2),\mathsf{A}_2),\mathsf{A}_2))$	$@(@(@(@(\mathsf{A}_2,\mathsf{A}_1),$ $\mathsf{A}_2),\mathsf{A}_2),\mathsf{A}_2)$
4	$\mathsf{n}_1,\mathsf{n}_2$	$@(@(@(@(\mathsf{n}_1,$ $@(\mathsf{n}_2,\mathsf{n}_2)),\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_1),\mathsf{n}_2)$	$@(@(\mathsf{n}_2,@(@(@(@(\mathsf{n}_2,\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_1),\mathsf{n}_1),\mathsf{n}_2)),$ $@(@(@(@(\mathsf{n}_2,\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_1),\mathsf{n}_2))$	$@(@(@(@(\mathsf{n}_2,\mathsf{n}_2),$ $\mathsf{n}_2),\mathsf{n}_1),\mathsf{n}_2)$
5	$\mathsf{s}_1,\mathsf{s}_2$	$@(@(@(\mathsf{s}_1,@(\mathsf{s}_1,\mathsf{s}_1)),$ $\mathsf{s}_2),\mathsf{s}_1)$	$@(@(\mathsf{s}_2,@(@(@(\mathsf{s}_1,\mathsf{s}_1),\mathsf{s}_2),\mathsf{s}_1))$	$@(@(@(\mathsf{s}_2,\mathsf{s}_1),$ $\mathsf{s}_2),\mathsf{s}_1)$
6	$\mathsf{O}_1,\mathsf{O}_2$	$@(@(@(@(\mathsf{O}_1,\mathsf{O}_1),$ $\mathsf{O}_1),\mathsf{O}_2),\mathsf{O}_2)$	$@(@(\mathsf{O}_2,@(@(\mathsf{O}_1,\mathsf{O}_2),\mathsf{O}_2)),$ $@(@(\mathsf{O}_1,\mathsf{O}_2),\mathsf{O}_2))$	$@(@(@(@(\mathsf{O}_2,\mathsf{O}_1),$ $\mathsf{O}_1),\mathsf{O}_2),\mathsf{O}_2)$