係数環完備化と貼合せ・直交性に基づく線形論理の Σ 加群モデルの再構成

伊藤 耀, 浅田 和之

線形論理の Σ 半環 R 上の加群モデルに対して, 係数環の完備化と「貼合せと直交性」によるモデル構成法を適用した．それにより構成したモデル上に $R-\Sigma$ 加群の MLL モデルを再構成した．モデルの再構成により具体的なモデル構造を明らかにすることが本研究の目的の 1 つであるが, ! の構造については現在未達成であり, さらなる研究が必要となる．

1 はじめに

Σ 半環 R 上の Σ 加群は，通常の環及び環上の加群の持つ有限和の代わりに可算無限引数の部分関数を和として持つ概念である．この Σ 半環 R 上の Σ 加群からなる圏は[3] にて線形論理のモデルを一般的に構成可能であることが明らかになっている．Σ 半環 R 上の Σ 加群からなる圏は係数環 R ごとに異なる数学的構造を成し，プログラミングにおける様々な計算機構を表現可能であるというモデル構成における高い汎用性を持つ．また，適切に係数環 R を選択することで Coherence space や Finiteness space などの従来の線形論理モデルと等価なモデルが Σ 加群の枠組みで得られている．論文[4] では、（圏化された）係数環として量子計算一階プログラミング言語の完全抽象モデルである $\mathcal{Q}$ を用いることにより、再帰型を持つ量子計算高階プログラミング言語の完全抽象モデルが得られた. しかし，具体的なモデル構造が明らかになっているのはごく一部であり，特に線形論理のモデル構造の 1 つである「！」の具体的な構造のさらなる分析が必要となる．

本論文では，係数環 R の完備化と「貼合せと直交性」によるモデル構成法の組み合わせにより得られるモデル上に，係数環 R からなるモデルを再構成することによって，モデル構造の分析を行う．論文[3] にて，Coherence space を表現する係数環 $\mathbb{I}$ に完備化と「貼合せと直交性」によるモデル構成法を適用することで，Coherence space を再構成可能であることが言及されており，本手法はこの結果の任意の係数環 R への一般化である．

2 準備：Σ 半環上の加群

2.1 Σ モノイド

定義 2.1 (Σ モノイド)**.**

Σ モノイド $M = (|M|, 0, \Sigma^M)$ は台集合 $|M|$ とその元 0, 和と呼ばれる可算無限引数の部分関数 $\Sigma^M : |M|^{\mathbb{N}} \rightharpoonup |M|$ からなる．和 Σ^M は無限引数での交換則や結合則を満たし,0 を単位元として持つ．

定義 2.2 (線形写像)**.**

Σ モノイドの間の線形写像 $f : M \to N$ とは, 以下を満たす (全域) 関数 $f : |M| \to |N|$.

- $f(0) = 0$
- $\Sigma_i^M m_i$ が定義される時 $f(\Sigma_i^M m_i) = \Sigma_i^N f(m_i)$

例 2.3 (Σ モノイドの例)**.**

- $\mathbb{I} = (\{0,1\}, 0, \Sigma^{\mathbb{I}})$ の和 $\Sigma^{\mathbb{I}}$ は 1 を 2 つ以上含む

Reconstruction of Σ module model of linear logic based on completion of coefficient ring and Glueing and Orthogonality

Yo Ito, 東北大学情報科学研究科, Graduate School of Information Sciences, Tohoku University.

Kazuyuki Asada, 東北大学電気通信研究所, Research Institute of Electrical Communication, Tohoku University.

とき未定義.

- $\mathbb{N}_\infty = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, 0, \Sigma^{\mathbb{N}_\infty})$ の和 $\Sigma^{\mathbb{N}_\infty}$ は自然数の和．和が発散する, または ∞ を含むとき ∞.
- $M \multimap N$ の台集合は M から N への線形写像全体．和 $\Sigma^{M \multimap N}$ は任意の $m \in |M|$ について $\Sigma_i^N f_i(m)$ が定義される時,$\Sigma_i^{M \multimap N} f_i$ も定義され, $(\Sigma_i^{M \multimap N} f_i)(m) = \Sigma_i^N f_i(m)$ となる.

2.2 Σ 半環

定義 2.4 (Σ 半環)**.**

Σ 半環 $R = (|R|, 0, \Sigma^R, 1, \cdot_R)$ は Σ モノイド $(|R|, 0, \Sigma^R)$ と $1 \in |R|$, 積と呼ばれる二項全域関数 $(- \cdot_R -) : |R| \times |R| \to |R|$ からなる．積 $(- \cdot_R -)$ は交換則や結合則, 和との分配則,$r \cdot_R 0 = 0 \cdot_R r = 0$ を満たし,1 を単位元として持つ.

例 2.5 (Σ 半環の例)**.**

- $\mathbb{I} = (\{0, 1\}, 0, \Sigma^{\mathbb{I}}, 1, \cdot_{\mathbb{I}})$ の積 $\cdot_{\mathbb{I}}$ は $0 \cdot_{\mathbb{I}} 0 = 1 \cdot_{\mathbb{I}} 0 = 0 \cdot_{\mathbb{I}} 1 = 0$,$1 \cdot_{\mathbb{I}} 1 = 1$
- $\mathbb{N}_\infty = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, 0, \Sigma^{\mathbb{N}_\infty}, 1, \cdot_{\mathbb{N}_\infty})$ の積 $\cdot_{\mathbb{N}_\infty}$ は自然数の積.

定義 2.6 (環準同型)**.**

Σ 半環間の環準同型 $f : R \to S$ とは,$f(1) = 1$ と $f(r \cdot_R r') = f(r) \cdot_S f(r')$ を満たす線形写像.

2.3 完備化 (Completion)

完備化[1] とは,Σ モノイド R を和が全域関数である Σ モノイド $\overline{R}$ に変換する手法である．本研究では Σ 半環に対して完備化を適用している.

定理 2.7 ([1])**.** ΣMon を Σ モノイドと線形写像からなる圏,$\Sigma\mathrm{Mon}_t$ を和が全域関数である Σ モノイドのみからなる圏とする．包含関手 $U : \Sigma\mathrm{Mon}_t \to \Sigma\mathrm{Mon}$ は左随伴関手 $T : \Sigma\mathrm{Mon} \to \Sigma\mathrm{Mon}_t$ を持ち, 対称モノイダル随伴を成す.

完備化の操作は $T : \Sigma\mathrm{Mon} \to \Sigma\mathrm{Mon}_t$ に該当する．R に対してその完備化 $\overline{R}$ は次を満たす射 $\eta_R : R \to \overline{R}$ が存在するものである.

- $S \in \Sigma\mathrm{Mon}_t$ と射 $f : R \to S$ について,$f = f^* \circ \eta_R$ を満たす f^* が一意に存在する.

$$
\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\eta_R"] \\
S & \overline{R} \arrow[l, dotted, "f^*"]
\end{tikzcd}
$$

2.4 Σ 半環上の加群

定義 2.8 (Σ 半環 R 上の加群)**.**

Σ 半環 R 上の加群 $M = (|M|, 0, \Sigma^M, \cdot_M)$ は Σ モノイド $(|R|, 0, \Sigma^R)$ と作用と呼ばれる二項全域関数 $(- \cdot_M -) : |R| \times |M| \to |M|$ からなる．作用 $(- \cdot_M -)$ は任意の $r, r' \in |R|$ と $m \in |M|$ について $r \cdot_M (r' \cdot_M m) = (r \cdot_R r') \cdot_M m$ と $1 \cdot_M x = x$ と $0 \cdot_M x = r \cdot_M 0 = 0$, 任意の $(r_i) \in |R|^{\mathbb{N}}$ と $(m_j) \in |M|^{\mathbb{N}}$ について $\Sigma_i^R r_i$ と $\Sigma_j^M m_j$ が共に定義されるとき $(\Sigma_i^R r_i) \cdot_M (\Sigma_j^M m_j) = \Sigma_i^M \Sigma_j^M r_i \cdot m_j$ を満たす.

定義 2.9 (R-線形写像)**.**

Σ 半環 R 上の加群の間の R-線形写像 $f : M \to N$ とは,$f(r \cdot_M m) = r \cdot_N f(n)$ を満たす線形写像.$M \multimap N$ は台集合を M から N への R-線形写像とする半環 R 上の加群.

Mod_R を Σ 半環 R 上の加群と R-線形写像からなる圏とする.

定理 2.10 ([3])**.** 任意の Σ 半環 R について Mod_R は対称モノイダル閉圏であり,(直観主義) 線形論理の Lafont モデルを成す.

2.5 $\mathbf{OBMod}_R^{\perp\perp}$

定義 2.11 (正規直交基底)**.**

Σ 半環 R 上の加群 $M = (|M|, 0, \Sigma^M, \cdot_M)$ の正規直交基底 $(e_i, \varphi_i)_{i \in I}$ とは,$e_i \in |M|$ と $\varphi : |M| \to |R|$ の組の族で以下を満たす.

- 全ての $m \in |M|$ について $m = \Sigma_i^M \varphi_i(m) \cdot_M e_i$
- $i = j$ のとき $\varphi_i(e_j) = 1$,$i \neq j$ のとき $\varphi_i(e_j) = 0$

Σ 半環 R 上の加群のうち正規直交基底を持つものからなる圏を OBMod_R と書く．さらにそのうち $M \simeq (M \multimap R) \multimap R$ を満たすものを $\mathrm{OBMod}_R^{\perp\perp}$

と書く.

定理 2.12 ([3]). 任意の Σ 半環 R について $\mathrm{OBMod}_R^{\perp\perp}$ は古典線形論理のモデルを成す.

3 準備：貼合せと直交性

張合せと直交性（Glueing and Orthogonality）[2] は, 線形論理モデルを元に他の線形論理モデルを構成する手法である.

3.1 二重貼合せ圏 (Double Glueing Category)

定義 3.1 (二重貼合せ圏).

対称モノイダル閉圏 $\mathcal{C}$ について，二重貼合せ圏 $G(\mathcal{C})$ とは以下のような圏.（I はテンソル積の単位元）

対象 (A, U, X) A は $\mathcal{C}$ の対象,

$U \subseteq \mathcal{C}(I, A)$, $\quad X \subseteq \mathcal{C}(A, I)$

射 $f : (A, U, X) \to (B, V, Y)$ は $\mathcal{C}$ の射 $f : A \to B$ で以下を満たす.

- 任意の $u \in U$ について,$f \circ u \in V$
- 任意の $y \in Y$ について,$y \circ f \in X$

命題 3.2 ([2]). 対称モノイダル閉圏 $\mathcal{C}$ について，二重貼合せ圏 $G(\mathcal{C})$ もまた対称モノイダル閉圏であり, 忘却関手 $G(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ はテンソル積を保つ.

3.2 直交性 (Orthogonality)

定義 3.3 (直交性).

対称モノイダル閉圏 $\mathcal{C}$ について,$G(\mathcal{C})$ 上の直交性 $(\perp_A)_{A\in ob(\mathcal{C})}$ とは, 以下を満たす関係 $\perp_A \subseteq \mathcal{C}(I, A) \times \mathcal{C}(A, I)$ の族である.

(1) $f : A \to B$ が同型射であるとき, 任意の $u : I \to A$,$x : A \to I$ について
$u \perp_A x \quad \Leftrightarrow f \circ u \perp_B x \circ f^{-1}$

(2) $u : I \to A$,$v : I \to B$,$x : A \otimes B \to I$ について
$u \perp_A \langle u|x\rangle_B$ かつ $v \perp_A \langle v|x\rangle_A \Rightarrow u \otimes v \perp_{A\otimes B} x$
(ただし,$u : I \to A$, $x : A \otimes B \to I$ について $\langle u|x\rangle_B := A \simeq A \otimes I \xrightarrow{id_A \otimes u} A \otimes B \xrightarrow{x} I$)

(3) $u : I \to A$,$y : B \to I$,$f : A \to I$ について
$u \perp_A y \circ f$ かつ $f \circ u \perp_B y \Rightarrow \hat{f} \perp_{A\multimap B} u \multimap y$
($\hat{f}$ は f の変換で,$u \multimap y : A \otimes B \to I \otimes I \simeq I$)

(4) $u : I \to A$,$x : A \to I$ について
$u \perp_A x \Rightarrow id_I \perp_I x \circ u$

直交性 $\perp := (\perp_A)_{A\in ob(\mathcal{C})}$ と $U \subseteq \mathcal{C}(I, A)$,$X \subseteq \mathcal{C}(A, I)$ について

$U^\circ := \{x : A \to I | \forall_{u\in U}. u \perp_A x\} \subseteq \mathcal{C}(A, I)$

$X^\circ := \{u : I \to A | \forall_{x\in X}. u \perp_A x\} \subseteq \mathcal{C}(I, A)$

また,(2)(3) の逆が成り立つとき, その直交性を正確である (precise) という.

3.3 堅直交圏 (Tight Orthogonality Category)

定義 3.4 (圏直交圏).

二重張合せ圏 $G(\mathcal{C})$ と直交性 $\perp$ について, 堅直交圏 $T(\mathcal{C})$ とは $U = X^\circ$ と $X = U^\circ$ を満たす対象 (A, U, X) のみからなる $G(\mathcal{C})$ の充満部分圏である.

命題 3.5 ([2]). *-自律圏 $\mathcal{C}$ について,$G(\mathcal{C})$ 上の正確な直交性が以下を満たすとする.

- 任意の $U \subseteq \mathcal{C}(I, A)$,$V \subseteq \mathcal{C}(I, B)$,$Y \subseteq \mathcal{C}(B, I)$ について
  - $(U^{\circ\circ} \otimes V^{\circ\circ})^\circ = (U \otimes V^{\circ\circ})^\circ = (U^{\circ\circ} \otimes V)^\circ$
    $U \otimes V := \{u \otimes v | u \in U, v \in V\}$
  - $(U^{\circ\circ} \multimap Y^{\circ\circ})^\circ = (U \multimap Y^{\circ\circ})^\circ = (U^{\circ\circ} \multimap Y)^\circ$
    $U \multimap Y := \{u \multimap y | u \in U, y \in Y\}$

このとき,$T(\mathcal{C})$ も*-自律圏であり, 忘却関手 $T(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ は構造を保つ.

4 Σ 加群モデルの再構成

係数環 R に対し, 次の条件を満たす R からの環準同型 $f : R \to R'$ 全体を $Inc(R)$ と書く.

条件 ： 任意の $\{r_n\} \in R^{\mathbb{N}}$ について $\Sigma_n^R r_n$ が未定義であるとき $\Sigma_n^{R'} f(r_n)$ も未定義または $f(R)$ に属さない.

R を完備化した $\overline{R}$ に写す η_R や,id_R も $Inc(R)$ の元となる．この $Inc(R)$ について以下が言える.

定理 4.1.

係数環 R と $f \in Inc(R)$ について, $\mathrm{G}(\mathrm{OBMod}_{R'}^{\perp\perp})$ における直交性として,$u \perp_A x \Leftrightarrow x \circ u(1) \in f(R)$ を考える．このとき忠実充満でテンソル積を保つ関手

$F : \mathrm{OBMod}_R^{\perp\perp} \to \mathrm{T}(\mathrm{OBMod}_{R'}^{\perp\perp})$ が存在する.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{OBMod}_{R'}^{\perp\perp} & \mathrm{G}(\mathrm{OBMod}_{R'}^{\perp\perp}) \arrow[l, "Forget"'] \\
\mathrm{OBMod}_R^{\perp\perp} \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook] & \mathrm{T}(\mathrm{OBMod}_{R'}^{\perp\perp}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

これにより R の完備化 $\overline{R}$ についても, 堅直交圏 $\mathrm{T}(\mathrm{OBMod}_{\overline{R}}^{\perp\perp})$ が R に関するモデルを包含することが言えた.

5 まとめと今後の課題

論文[3] にて言及されていた係数環の完備化と貼合せと直交性に基づく手法に関する結果の一般化を行なった. 任意の係数環 R にてその完備化の堅直交圏が R に関する MLL モデルを包含することを示しただけでなく, 完備化のみならず包含できる係数環のより一般的な条件を与えた.

この包含関手はテンソル積の構造を保つが,!の構造については自明には保たないことが現在分かっており, ! の構成については今後の課題となる. また, 今回は正規直交基底を持つ加群に限定しているが, 他の種類の基底を持つ加群にするなど他の状況においても研究を進めたい.

参 考 文 献

[1] Hoshino, N.: A representation theorem for unique decomposition categories, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Vol. 286(2012), pp. 213–227.

[2] Hyland, M. and Schalk, A.: Glueing and orthogonality for models of linear logic, *Theoretical computer science*, Vol. 294, No. 1-2(2003), pp. 183–231.

[3] Tsukada, T. and Asada, K.: Linear-Algebraic Models of Linear Logic as Categories of Modules over Σ-Semirings, *Proceedings of the 37th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, 2022, pp. 1–13.

[4] Tsukada, T. and Asada, K.: Enriched presheaf model of quantum fpc, *Proceedings of the ACM on Programming Languages*, Vol. 8, No. POPL(2024), pp. 362–392.