一般的な組合せ子の非ω-強頭部正規化可能性・停止性・非基礎ループ性

岩見 宗弘

Smullyan(1994) により，6 例の一般的な組合せ子が紹介されている．本論文では，これらの組合せ子からなる項書き換えシステムがすべて ω-強頭部正規化可能性をもたないことを示す．また，3 例が停止性をもち，5 例が非循環性をもち，4 例が非基礎ループ性をもつことを示す．さらに，2 例が停止性をもつかどうかが不明であることを報告する．

1 はじめに

一般の項を扱う計算モデルとして，項書き換えシステム (TRS) がよく知られている [17]，[14]．組合せ子がもつ書き換え規則は TRS としてみなすことができる．組合せ子は TRS の分かりやすい例としてだけではなく，関数型プログラミング言語の効率的な実装にも応用されている [17]，[15]，[18]．

書き換えシステムにおいて，停止性はすべての書き換えの結果が必ず得られることを保証する重要な性質の一つである．組合せ子からなる TRS は一見単純であるが，1 つの書き換え規則だけからなる TRS の停止性は一般に決定不能であることが知られている [2]．現在までに，文献 [16] において紹介された多くの組合せ子に関して，停止性，非循環性，非基礎ループ性等が示されてきた [1]，[4]，[8]，[9]，[10]，[12]，[13]，[19]．

有限項上の TRS に基づく様々な検証法において停止性は非常に有用な性質として知られており，様々な停止性の証明法や反証法が提案されている [6]，[14]，[17]．しかしながら，無限項上の TRS では停止性を考える意味があまりない．無限項を対象とする TRS は停止性をもたないことが普通である．このため，停止性に代わる無限項上の TRS における基本的な性質として，ω-強頭部正規化可能性が考えられている [20]，[5]．ω-強頭部正規化可能性は，項の任意の位置が有限回しか書き換えができないという性質である．すなわち，無限書き換え列がある種の極限に収束することを保証する．最近，岩見 [10] は，文献 [16] において紹介された多くの組合せ子に対して，文献 [11] で提案した反証手続きを用いて ω-強頭部正規化可能性の反証をしている．

Smullyan は文献 [16] において 6 例の一般的な組合せ子 B_n[†1]$, \mathsf{V}_n$[†2]$, \mathsf{C}_n, \mathsf{W}_n, \Phi_n, \mathsf{A}_n$ を紹介している．これらの組合せ子からなる TRS に対する ω-強頭部正規化可能性は明らかにされていない．また，これらの組合せ子の停止性，非循環性，非基礎ループ性，非ループ性は明らかにされていない．

本論文では，反例を手作業で与える [†3] ことにより，これらの組合せ子からなる TRS に対する ω-強頭部正規化可能性を反証する．さらに，これらの組合せ子からなる TRS が停止性，非循環性，非基礎ループ性，非ループ性をもつかどうかを明らかにする．組合せ子の書き換え規則は表 1 にまとめる．組合せ子

* Non-ω-Strong Head Normalization, Termination and Non-Ground Loop of Generalized Combinators.

Munehiro Iwami, 島根大学総合理工学部知能情報デザイン学科, Dept. of Information Systems Design and Data Science, Shimane University.

†1 任意の $n \geq 1$ に対して，$\mathsf{B}_n, \mathsf{W}_n$ は定義される．

†2 任意の $n \geq 2$ に対して，$\mathsf{V}_n, \mathsf{C}_n, \Phi_n, \mathsf{A}_n$ は定義される．

†3 一般的な組合せ子に対して反証手続き [11] は適用できない．

表 1　一般的な組合せ子の書き換え規則

組合せ子の書き換え規則
$\mathsf{B}_n x y_1 \ldots y_n z \to x(y_1 \ldots y_n z)$ $(n \geq 1)$
$\mathsf{V}_n x y_1 \ldots y_n z \to x z y_1 \ldots y_n$ $(n \geq 2)$
$\mathsf{C}_n x z y_1 \ldots y_n \to x y_1 \ldots y_n z$ $(n \geq 2)$
$\mathsf{W}_n x y_1 \ldots y_n z \to x y_1 \ldots y_n z z$ $(n \geq 1)$
$\Phi_n x y z w_1 \ldots w_n \to x(y w_1 \ldots w_n)(z w_1 \ldots w_n)$ $(n \geq 2)$
$\mathsf{A}_n w z x_1 \ldots x_n \to z(w x_1 x_1 \ldots x_n) \ldots (w x_n x_1 \ldots x_n)$ $(n \geq 2)$

の ω-強頭部正規化可能性の反証結果は表 2 にまとめる．組合せ子の停止性，非循環性，非基礎ループ性，非ループ性に関しては表 3 にまとめる．

本論文の構成は次の通りである．第 2 節では，組合せ子論理と項書き換えシステムに関する定義や記法を与える．第 3 節では正則項と再帰式表現の定義を述べる．第 4 節では，一般的な組合せ子からなる TRS の ω-強頭部正規化可能性を反証する．第 5 節では，一般的な組合せ子からなる TRS の停止性と非循環性を示す．第 6 節では，任意の $n \geq 2$ に対して，組合せ子 Φ_n が非基礎ループ性をもつことを示す．第 7 節では，結論と今後の課題を述べる．

2　準備

本論文の定義は文献 [9], [10], [11], [17], [19] に基づく．本節では，組合せ子論理と項書き換えシステムの定義について述べる．

2.1　組合せ子論理

組合せ子論理については文献 [1] の 7 章，文献 [16] の 18 章を参照していただきたい．組合せ子論理は 5 節で使用する．

以下では，記号 Z をある組合せ子とする．**変数**の加算無限集合を $\mathcal{V}$ とする ($\{Z\} \cap \mathcal{V} = \emptyset$)．組合せ子 Z 上の項の集合 $CL(Z, \mathcal{V})$ を以下の通り帰納的に定義する：(1) $\mathcal{V} \subseteq CL(Z, \mathcal{V})$，(2) $Z \in CL(Z, \mathcal{V})$，(3) $s, t \in CL(Z, \mathcal{V})$ ならば $(st) \in CL(Z, \mathcal{V})$．集合 $CL(Z, \mathcal{V})$ の項を Z**-項**とよぶ．また，変数を含まない Z-項を**基礎** Z**-項**とよび，基礎 Z-項全体の集合を $CL(Z)$ で表す．Z**-文脈**，すなわち，0 個以上のホール $\square$ を含む Z-項の集合 $CL(\{Z, \square\}, \mathcal{V})$ を下記の通り定義する：(1) $\mathcal{V} \subseteq CL(\{Z, \square\}, \mathcal{V})$，(2) $Z \in CL(\{Z, \square\}, \mathcal{V})$，(3) $\square \in CL(\{Z, \square\}, \mathcal{V})$，(4) $s, t \in CL(\{Z, \square\}, \mathcal{V})$ ならば $(st) \in CL(\{Z, \square\}, \mathcal{V})$．1 つのホール $\square$ を含む Z-文脈を $C[\,]$ で表す．Z-文脈 $C[\,]$ のホール $\square$ を Z-項 t で置き換えた項を $C[t]$ で表す．(st) は括弧を省略して，st と書く．括弧は左結合である．すなわち，$t_1 t_2 \ldots t_n$ は $(\ldots(t_1 t_2) \ldots t_n)$ を意味する．Z-項 t に含まれている変数の集合を $\mathcal{V}(t)$ と表す．

写像 $\sigma : \mathcal{V} \to CL(Z, \mathcal{V})$ の定義域 $dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \neq x\}$ が有限であるものを**代入**という．すべての代入 σ はある組合せ子 Z と Z-項 $t_1, \ldots, t_n$ に対して，$\sigma(Z t_1 \ldots t_n) = Z \sigma(t_1) \ldots \sigma(t_n)$ を満たす写像 $\sigma : CL(Z, \mathcal{V}) \to CL(Z, \mathcal{V})$ へ拡張できる．以下では，$\sigma(t)$ の代わりに $t\sigma$ と表す．書き換え規則 $Z x_1 \ldots x_n \to t$ は組合せ子 Z がもつ方向付けられた等式であり，次の条件を満たす：(1) 変数 $x_1, \ldots, x_n$ は相異なる，(2) $\mathcal{V}(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$．書き換え規則 $Z x_1 \ldots x_n \to t$ による $CL(Z, \mathcal{V})$ 上の書き換え $\to$ を下記の通り定義する：$s \to t$ であるとき，かつそのときに限り，ある Z-文脈 $C[\,], u_1, \ldots, u_n \in CL(Z, \mathcal{V})$ に対して，$s = C[Z u_1 \ldots u_n]$ かつ $t = C[t\{x_1 := u_1, \ldots, x_n := u_n\}]$．このとき，$Z u_1 \ldots u_n$ を Z**-リデックス**という．書き換え $\to$ が無限書き換え列 $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \cdots$ をもたないとき，**停止性をもつ**という．書き換え $\to$ の推移的閉包を $\to^+$ で表す．書き換え $t \to^+ t$ を**循環**であるという．書き換え $\to$ が循環書き換えをもたないとき，組合せ子 Z は**非循環性をもつ**という．Z-文脈 $C[\,]$，代入 σ に対して，書き換え $t \to^+ C[t\sigma]$ を**ループ**という．書き換え $\to$ がループをもたないとき，組合せ子 Z は**非ループ性**

をもつという．書き換え $t \to^+ C[t]$ を**基礎ループ**という．書き換え $\to$ が基礎ループをもたないとき，組合せ子 Z は**非基礎ループ性をもつ**という．

2.2 項書き換えシステム

項書き換えシステムの詳細については文献[11], [17]を参照していただきたい．

関数記号の集合を $\mathcal{F}$，変数の加算無限集合を $\mathcal{V}$ と表す．各関数記号の集合は**項数** $n \in \mathbb{N}$ をもつ．項数 0 の関数記号を**定数**とよび，項数 n の関数記号の集合を $\mathcal{F}_n$ と表す．$\mathbb{N}_+$ を正整数集合とし，正整数の有限列の集合を $\mathbb{N}_+^*$ と表す．有限列 $p, q \in \mathbb{N}_+^*$ の連結を $p.q$ と表す．部分関数 $t : \mathbb{N}_+^* \to \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ のうち，以下の条件を満たすものを $\mathcal{F}, \mathcal{V}$ 上の**項**とよぶ：(1) $t(\epsilon) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$，(2) 任意の $p \in \mathbb{N}_+^*$ に対して，$t(p.i) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ であるとき，かつそのときに限り，$t(p) \in \mathcal{F}_n$ かつ $1 \leq i \leq n$．ここで，ϵ は空列を表す．$\mathcal{F}, \mathcal{V}$ 上の項の集合を $T_{inf}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と表す．

項 $t \in T_{inf}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ の定義域 $Pos(t) = \{p \in \mathbb{N}_+^* \mid t(p) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V}\}$ の要素を t における**位置**とよぶ．特に，位置 ϵ を**根位置**とよぶ．$t(p)$ を項 t の位置 p に出現する記号とよび，特に $t(\epsilon)$ を**根記号**とよぶ．$p \notin Pos(s)$ なる $p \in \mathbb{N}_+^*$ に対して，$\perp$ は $\perp \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ なる定数とする．このとき，$s = t \Leftrightarrow \forall p \in Pos(s).\ s(p) = t(p)$ が成立する．項 t に出現する変数の集合を $\mathcal{V}(t)$ で表す．$\mathcal{V}(t) = \emptyset$ なる項を**基礎項**という．位置の集合 $Pos(t)$ が有限集合であるとき，項 t を**有限**であるという．有限項の集合を $T_{fin}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と表す．特に，有限項と区別するときには，項を**無限項**とよぶこともある．位置 $p \in Pos(t)$ における項 t の**部分項** $t|_p$ を $t|_p(q) = t(p.q)$ により定義し，$t|_p \trianglelefteq t$ と表す．関数記号 $f \in \mathcal{F}_n$ および項 $t_1, \ldots, t_n \in T_{inf}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に対して，(1) $t(\epsilon) = f$，(2) $t(i.p) = t_i(p)$ $(1 \leq i \leq n, p \in \mathbb{N}_+^*)$ により定義される項 t を $f(t_1, \ldots, t_n)$ と表す．位置の集合上の接頭辞順序を $p \leq q \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N}_+^*.\ q = p.r$ により定義する．ある位置 q および正整数 $i < j$ が存在して，$q.i \leq p_1$ かつ $q.j \leq p_2$ となるとき，p_1 は p_2 の**左に**位置するという．

写像 $\sigma : \mathcal{V} \to T_{inf}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を**代入**とよぶ．代入 σ を項 $t \in T_{inf}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に適用した結果 $\sigma(t)$ を，以下のように定義する：$\sigma(t)(p) = \sigma(t(p_0))(p_1)$ $(p = p_0.p_1$ かつ $t(p_0) \in \mathcal{V}$ を満たす $p_0, p_1 \in \mathbb{N}_+^*$ が存在する場合)，$\sigma(t)(p) = t(p)$ (それ以外の場合)．直感的には，$\sigma(t)$ は t に出現する変数 $x \in \mathcal{V}$ を $\sigma(x)$ により置き換えて得られる項を表す．代入 σ の定義域を $dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \neq x\}$ とする．$dom(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_n\}, \sigma(x_i) = t_i$ なる代入を $\{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\}$ と表す．$dom(\sigma)$ が有限かつ任意の $x \in dom(\sigma)$ に対して $\sigma(x) \in T_{fin}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ であるとき，σ を**有限代入**とよぶ．$\sigma(t)$ を $t\sigma$ とも表す．項 s, t に対して，$s\sigma = t$ となる代入 σ が存在するとき，項 s は t に**照合可能**であるという．

$\Box \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ なる定数 $\Box$ を**ホール**とよぶ．$T_{inf}(\mathcal{F} \cup \{\Box\}, \mathcal{V})$ の要素 C のうち，$\{p \in \mathbb{N}_+^* \mid C(p) = \Box\}$ が有限集合であるものを**文脈**とよぶ．$C \in T_{inf}(\mathcal{F} \cup \{\Box\}, \mathcal{V})$ が $\{p_1, \ldots, p_n\} = \{p \in \mathbb{N}_+^* \mid C(p) = \Box\}$ かつ任意の $i < j$ に対して p_i が p_j より左に位置するとき，C を文脈 $C[, \ldots,]_{p_1, \ldots, p_n}$ と表す．文脈 $C[, \ldots,]_{p_1, \ldots, p_n}$ と項 $t_1, \ldots, t_n \in T_{inf}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に対して，項 $t = C[t_1, \ldots, t_n]_{p_1, \ldots, p_n}$ を以下のように定義する：$t(p) = t_i(q)$ $(p = p_i.q$ なる i, q が存在する場合)，$t(p) = C(p)$ (それ以外の場合)．直感的には，$C[t_1, \ldots, t_n]_{p_1, \ldots, p_n}$ は文脈 C に出現するホールを左から順に $t_1, \ldots, t_n$ に置き換えて得られる項を表す．また，ホールがちょうど 1 つ出現する文脈を $C[\,]_p$ と表す．

等式を $s \approx t$ と表す．ただし，ここで $s, t \in T_{inf}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ とする．等式 $s \approx t$ の左辺は s，右辺は t をさし，等式の左辺と右辺を区別する．等式 $l \approx r$ が以下の条件を満たすとき，これを**書き換え規則**とよび，$l \to r$ と表す：(1) l, r は有限項，(2) $l \notin \mathcal{V}$，(3) $\mathcal{V}(r) \subseteq \mathcal{V}(l)$．書き換え規則の集合 $\mathcal{R}$ を**項書き換えシステム** (TRS) とよぶ．

項 $s, t \in T_{inf}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に対して，書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$，代入 σ，文脈 $C[\,]_p$ が存在して，$s = C[l\sigma]_p$ かつ $t = C[r\sigma]_p$ のとき，$s \to_{p,\mathcal{R}} t$ と表す．これを位置 p における項 s から項 t への**簡約**または**書き換えステップ**とよぶ．根位置 ϵ における簡約を**根書き換え**とよぶ．部分項 $s|_p$ を**リデックス**とよぶ．文脈から明らかな場合または必要がない場合は $p, \mathcal{R}$ を省略する．

$\to_{\mathcal{R}}$ の反射推移的閉包を $\to_{\mathcal{R}}^*$ と表し，$\to_{\mathcal{R}}$ の推移的閉包を $\to_{\mathcal{R}}^+$ と表す．

最小の無限順序数を ω と表す．α を $\alpha > 0$ なる順序数とする．関数 $A : \alpha \to T_{inf}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ が任意の β $(0 \leq \beta + 1 < \alpha)$ について $A(\beta) \to_{\mathcal{R}} A(\beta + 1)$ を満たすとき，A を**超限書き換え列**という．ここで，$\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ であることに注意する．特に，$\alpha < \omega$ であるとき A を**有限書き換え列**，$\alpha = \omega$ であるとき A を**無限書き換え列**とよぶ．

TRS $\mathcal{R}$ が有限項 t_0 に対して，無限書き換え列 $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} \cdots$ をもたないとき，**停止性をもつ**という．TRS $\mathcal{R}$ において，有限項 t に対する書き換え $t \to_{\mathcal{R}}^+ t$ を**循環**であるという．TRS $\mathcal{R}$ が循環書き換えをもたないとき，**非循環性をもつ**という．t を有限項，$C[\,]$ を文脈，σ を代入とする．TRS $\mathcal{R}$ において，書き換え $t \to_{\mathcal{R}}^+ C[t\sigma]$ を**ループ**という．TRS $\mathcal{R}$ がループをもたないとき，**非ループ性をもつ**という．TRS $\mathcal{R}$ において，書き換え $t \to_{\mathcal{R}}^+ C[t]$ を**基礎ループ**という．TRS $\mathcal{R}$ が基礎ループをもたないとき，**非基礎ループ性をもつ**という．

3 正則項と再帰式表現

本節では，正則項と再帰式表現の定義を述べる．本節では，組合せ子からなる TRS の例では中値記法の適用演算子 $\cdot$ を用いる．また，$\cdot$ は左結合であるとして，不要な括弧は省略する．

定義 1. (正則項 [3]) 項 t が**正則**であるとは，t の部分項集合が有限であるときをいう．

例 2. (正則項) $t = \mathsf{V}_2 \cdot t \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot z$ とする．t の部分項集合は $\{t, \mathsf{V}_2 \cdot t \cdot y_1 \cdot y_2, \mathsf{V}_2 \cdot t \cdot y_1, \mathsf{V}_2 \cdot t, \mathsf{V}_2, y_1, y_2, z\}$ より有限である．よって，t は正則項である．

定義 3. (再帰式表現 [11]) 有限代入 $\{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\}$ が以下の条件を満たすとき，これを**再帰式表現**とよび，$[x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ と表す：$\neg\exists i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}. (\forall 1 \leq j < k.\ t_{i_j} = x_{i_{j+1}}) \wedge t_{i_k} = x_{i_1}$.

定義 4. (再帰式表現の解 [11]) $\theta = [x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ を再帰式表現とし，任意の $1 \leq i \leq n$ に対して，$t_i = C_i[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k_i}}]_{p_{i_1}, \ldots, p_{i_{k_i}}}$ とする．ただし，文脈 C_i には変数 $x_1, \ldots, x_n$ が出現しないとする．このとき，項 $\theta^\star(x_1), \ldots, \theta^\star(x_n)$ を以下のように相互再帰的に定義する．$\theta^\star(x_i)(p) =$

$$\begin{cases} C_i(p) & (p \in Pos(C_i) \wedge C_i|_p \neq \Box \text{ の場合}) \\ \theta^\star(x_{i_j})(q) & (\exists j, q.\ p = p_{i_j}.q \text{ の場合}) \end{cases}$$

項 $\theta^\star(x_1), \ldots, \theta^\star(x_n)$ を再帰式表現の**解**とよぶ．

命題 5. (正則項と再帰式表現 [3]) 再帰式表現の解は正則項である．また，任意の正則項はある再帰式表現の解となる．

任意の正則項は，再帰式表現 θ を用いて，$\theta^\star$ の形で表すことができる．これを**正則項の再帰式表現**とよぶ．$\mu x.t$ は $[x := t]^\star(x)$ を意味する (ただし，$x \neq t$ とする)．$\mu x.$ は関数適用より結合力が弱いものとして括弧を省略する．たとえば，$\mu x.\mathsf{V}_2 \cdot x \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot z$ は $[x := \mathsf{V}_2 \cdot x \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot z]^\star(x)$ を意味する．

4 一般的な組合せ子の ω-強頭部正規化可能性の反証

本節では，最初に ω-強頭部正規化可能性を定義する．次に，一般的な組合せ子からなる TRS に対する ω-強頭部正規化可能性を反証する．

以降では，組合せ子からなる TRS の例では中値記法の適用演算子 $\cdot$ を省略する．

定義 6. (ω-強頭部正規化可能性 [20]) $\mathcal{R}$ を TRS とする．任意の無限書き換え列 $t_0 \to_{p_0, \mathcal{R}} t_1 \to_{p_1, \mathcal{R}} t_2 \to_{p_2, \mathcal{R}} \cdots$ に対して，ある n_0 が存在して任意の n $(n_0 \leq n < \omega)$ について $p_n \neq \epsilon$ となるとき，$\mathcal{R}$ は **ω-強頭部正規化可能性**をもつという．

たとえば，$\mathcal{R} = \{\mathsf{g}(x) \to \mathsf{h}(\mathsf{g}(x))\}$ とするとき，$\mathcal{R}$ は ω-強頭部正規化可能性をもつ．$\mathcal{R} = \{\mathsf{f}(x) \to \mathsf{f}(x)\}$ とするとき，$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\ldots))) \to_{\epsilon, \mathcal{R}} \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\ldots))) \to_{\epsilon, \mathcal{R}} \cdots$ より，$\mathcal{R}$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．

次の組合せ子 B_n は B のみから構成される [16]．

補題 7. 任意の $n \geq 1$ に対して，TRS $\mathcal{R}(\mathsf{B}_n) = \{\mathsf{B}_n x y_1 \ldots y_n z \to x(y_1 \ldots y_n z)\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}(\mathsf{B}_n)$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．

(証明) $x = \mathsf{B}_n x y_1 \ldots y_n$ とする． すなわち，

表 2　一般的な組合せ子からなる TRS に対する ω-強頭部正規化可能性の反証

組合せ子の書き換え規則	結果	反例
$\mathsf{B}_n x y_1 \ldots y_n z \to x(y_1 \ldots y_n z)$ $(n \geq 1)$	○	$\mathsf{B}_n(\mu x.\mathsf{B}_n x y_1 \ldots y_n) y_1 \ldots y_n z$
$\mathsf{V}_n x y_1 \ldots y_n z \to x z y_1 \ldots y_n$ $(n \geq 2)$	○	$\mathsf{V}_n(\mu x.\mathsf{V}_n x) y_1 \ldots y_n z$
$\mathsf{C}_n x z y_1 \ldots y_n \to x y_1 \ldots y_n z$ $(n \geq 2)$	○	$\mathsf{C}_n(\mu x.\mathsf{C}_n x) z y_1 \ldots y_n$
$\mathsf{W}_n x y_1 \ldots y_n z \to x y_1 \ldots y_n z z$ $(n \geq 1)$	○	$\mathsf{W}_n W_n \underbrace{\mathsf{W}_n \ldots \mathsf{W}_n}_{n} \mathsf{W}_n$
$\Phi_n x y z w_1 \ldots w_n \to x(y w_1 \ldots w_n)(z w_1 \ldots w_n)$ $(n \geq 2)$	○	$\Phi_n(\mu x.\Phi_n x y z w_1 \ldots w_{n-2}) y z w_1 \ldots w_n$
$\mathsf{A}_n w z x_1 \ldots x_n \to z(w x_1 x_1 \ldots x_n) \ldots (w x_n x_1 \ldots x_n)$ $(n \geq 2)$	○	$\mathsf{A}_n w(\mu z.\mathsf{A}_n w z) x_1 \ldots x_n$

(○：成功 (本研究))

$t = \mu x.\mathsf{B}_n x y_1 \ldots y_n$.

$$\begin{array}{ll} & \mathsf{B}_n t y_1 \ldots y_n z \\ \to_\epsilon & t(y_1 \ldots y_n z) \\ = & \mathsf{B}_n t y_1 \ldots y_n(y_1 \ldots y_n z) \\ \to_\epsilon & t(y_1 \ldots y_n(y_1 \ldots y_n z)) \\ = & \mathsf{B}_n t y_1 \ldots y_n(y_1 \ldots y_n(y_1 \ldots y_n z)) \\ \to_\epsilon & \cdots \end{array}$$

このとき，任意の $n \geq 1$ に対して，$\mathcal{R}(\mathsf{B}_n)$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．その反例は下記の通りである：$\mathsf{B}_n(\mu x.\mathsf{B}_n x y_1 \ldots y_n) y_1 \ldots y_n z$. □

次の組合せ子 V_n は B と C から構成される [16].

補題 8. 任意の $n \geq 2$ に対して，TRS $\mathcal{R}(\mathsf{V}_n) = \{\mathsf{V}_n x y_1 \ldots y_n z \to x z y_1 \ldots y_n\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}(\mathsf{V}_n)$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．

(証明) $x = \mathsf{V}_n x$ とする． すなわち，$t = \mu x.\mathsf{V}_n x$.

$$\begin{array}{ll} & \mathsf{V}_n t y_1 \ldots y_n z \\ \to_\epsilon & t z y_1 \ldots y_n \\ = & \mathsf{V}_n t z y_1 \ldots y_n \\ \to_\epsilon & t y_n z y_1 \ldots y_{n-1} \\ = & \mathsf{V}_n t y_n z y_1 \ldots y_{n-1} \\ \to_\epsilon^+ & \mathsf{V}_n t y_1 \ldots y_n z \end{array}$$

よって，任意の $n \geq 2$ に対して，$\mathcal{R}(\mathsf{V}_n)$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．その反例は下記の通りである：$\mathsf{V}_n(\mu x.\mathsf{V}_n x) y_1 \ldots y_n z$. □

補題 9. 任意の $n \geq 2$ に対して，TRS $\mathcal{R}(\mathsf{C}_n) = \{\mathsf{C}_n x z y_1 \ldots y_n \to x y_1 \ldots y_n z\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}(\mathsf{C}_n)$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．

(証明) $x = \mathsf{C}_n x$ とする．すなわち，$t = \mu x.\mathsf{C}_n x$.

$$\begin{array}{ll} & \mathsf{C}_n t z y_1 \ldots y_n \\ \to_\epsilon & t y_1 \ldots y_n z \\ = & \mathsf{C}_n t y_1 \ldots y_n z \\ \to_\epsilon & t y_2 \ldots y_n z y_1 \\ = & \mathsf{C}_n t y_2 \ldots y_n z y_1 \\ \to_\epsilon^+ & \mathsf{C}_n t z y_1 \ldots y_n \end{array}$$

よって，任意の $n \geq 2$ に対して，$\mathcal{R}(\mathsf{C}_n)$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．その反例は下記の通りである：$\mathsf{C}_n(\mu x.\mathsf{C}_n x) z y_1 \ldots y_n$. □

次の組合せ子 W_n は B と W から構成される [16].

補題 10. 任意の $n \geq 1$ に対して，TRS $\mathcal{R}(\mathsf{W}_n) = \{\mathsf{W}_n x y_1 \ldots y_n z \to x y_1 \ldots y_n z z\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}(\mathsf{W}_n)$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．また，停止性，非循環性，非基礎ループ性をもたない．

(証明) いま，下記の書き換えが成り立つ．

$$\mathsf{W}_n \mathsf{W}_n \underbrace{\mathsf{W}_n \ldots \mathsf{W}_n}_{n} \mathsf{W}_n \to_\epsilon \mathsf{W}_n \underbrace{\mathsf{W}_n \ldots \mathsf{W}_n}_{n} \mathsf{W}_n \mathsf{W}_n.$$

このとき，任意の $n \geq 1$ に対して，$\mathcal{R}(\mathsf{W}_n)$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．また，$\mathcal{R}(\mathsf{W}_n)$ は停止性，非循環性，非基礎ループ性をもたない． □

組合せ子 $\Phi x y z w \to x(y w)(z w)$ は B と S から構成される．次の組合せ子 $\Phi_n x y z w_1 \ldots w_n \to x(y w_1 \ldots w_n)(z w_1 \ldots w_n)$ は B と Φ から構成される [16].

補題 11. 任意の $n \geq 2$ に対して，TRS $\mathcal{R}(\Phi_n) = \{\Phi_n x y z w_1 \ldots w_n \to x(y w_1 \ldots w_n)(z w_1 \ldots w_n)\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}(\Phi_n)$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．

(証明) $x = \Phi_n x y z w_1 \ldots w_{n-2}$ とする．すなわち，

$t = \mu x.\Phi_n xyzw_1 \ldots w_{n-2}$.

$$
\begin{array}{ll}
& \Phi_n tyzw_1 \ldots w_n \\
\to_\epsilon & t(yw_1 \ldots w_n)(zw_1 \ldots w_n) \\
= & \Phi_n tyzw_1 \ldots w_{n-2}(yw_1 \ldots w_n)(zw_1 \ldots w_n) \\
\to_\epsilon & t(yw_1 \ldots w_{n-2}(yw_1 \ldots w_n)(zw_1 \ldots w_n)) \\
& (zw_1 \ldots w_{n-2}(yw_1 \ldots w_n)(zw_1 \ldots w_n)) \\
= & \Phi_n tyzw_1 \ldots w_{n-2} \\
& (yw_1 \ldots w_{n-2}(yw_1 \ldots w_n)(zw_1 \ldots w_n)) \\
& (zw_1 \ldots w_{n-2}(yw_1 \ldots w_n)(zw_1 \ldots w_n)) \\
\to_\epsilon & \cdots
\end{array}
$$

このとき，任意の $n \geq 2$ に対して，$\mathcal{R}(\Phi_n)$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．その反例は下記の通りである：$\Phi_n(\mu x.\Phi_n xyzw_1 \ldots w_{n-2})yzw_1 \ldots w_n$. □

次の組合せ子 A_n は $\mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{W}$ から構成される [16].

補題 12. 任意の $n \geq 2$ に対して，TRS $\mathcal{R}(\mathsf{A}_n) = \{\mathsf{A}_n wzx_1 \ldots x_n \to z(wx_1x_1 \ldots x_n)(wx_2x_1 \ldots x_n) \ldots (wx_nx_1 \ldots x_n)\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}(\mathsf{A}_n)$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．

(証明) $z = \mathsf{A}_n wz$ とする．すなわち，$t = \mu z.\mathsf{A}_n wz$. ここで，$s_i = (wx_ix_1 \ldots x_n)$ とする $(1 \leq i \leq n)$.

$$
\begin{array}{ll}
& \mathsf{A}_n wtx_1 \ldots x_n \\
\to_\epsilon & ts_1 \ldots s_n \\
= & \mathsf{A}_n wts_1 \ldots s_n \\
\to_\epsilon & t(ws_1s_1 \ldots s_n) \ldots (ws_ns_1 \ldots s_n) \\
= & \mathsf{A}_n wt(ws_1s_1 \ldots s_n) \ldots (ws_ns_1 \ldots s_n) \\
\to_\epsilon & \cdots
\end{array}
$$

よって，任意の $n \geq 2$ に対して，$\mathcal{R}(\mathsf{A}_n)$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．その反例は下記の通りである：$\mathsf{A}_n w(\mu z.\mathsf{A}_n wz)x_1 \ldots x_n$. □

定理 13. 任意の $n \geq 1$ に対して，組合せ子 $Z \in \{\mathsf{B}_n, \mathsf{W}_n\}$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．また，任意の $n \geq 2$ に対して，組合せ子 $Z \in \{\mathsf{V}_n, \mathsf{C}_n, \Phi_n, \mathsf{A}_n\}$ は ω-強頭部正規化可能性をもたない．

一般的な組合せ子の ω-強頭部正規化可能性の反証結果は表 2 にまとめる．なお，表中では組合せ子の適用演算子 $\cdot$ は省略している．

5 一般的な組合せ子の停止性・非循環性・非基礎ループ性

本節では，一般的な組合せ子からなる TRS に対する停止性，非循環性，非基礎ループ性を示す．

定義 14. ([9]) $s \in CL(Z)$ とする．s の**長さ** $|s|$ を次のように帰納的に定義する：(1) $|Z| = 1$, (2) $|(st)| = |s| + |t|$.

補題 15. 任意の $n \geq 1$ に対して，TRS $\mathcal{R}(\mathsf{B}_n) = \{\mathsf{B}_n xy_1 \ldots y_n z \to x(y_1 \ldots y_n z)\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}(\mathsf{B}_n)$ は停止性をもつ．

(証明) $\mathsf{B}_n xy_1 \ldots y_n z >_{lpo} x(y_1 \ldots y_n z)$. このとき，任意の $n \geq 1$ に対して，辞書式経路順序 $>_{lpo}$ [14] を用いて $\mathcal{R}(\mathsf{B}_n)$ が停止性をもつことを示すことができる． □

補題 16. 任意の $n \geq 2$ に対して，TRS $\mathcal{R}(\mathsf{V}_n) = \{\mathsf{V}_n xy_1 \ldots y_n z \to xzy_1 \ldots y_n\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}(\mathsf{V}_n)$ は停止性をもつ．

(証明) ここでは，$\mathcal{R}(\mathsf{V}_n)$ の書き換え規則を組合せ子論理の書き換え規則とみなして証明する．任意の $u_1, v_1, \ldots, v_n, u_2 \in CL(\mathsf{V}_n)$ に対して，$|\mathsf{V}_n u_1 v_1 \ldots v_n u_2| = 1 + |u_1| + |v_1| + \cdots + |v_n| + |u_2|$ かつ $|u_1 u_2 v_1 \ldots v_n| = |u_1| + |u_2| + |v_1| + \cdots + |v_n|$ より，$|\mathsf{V}_n u_1 v_1 \ldots v_n u_2| > |u_1 u_2 v_1 \ldots v_n|$. よって，任意の $n \geq 2$ に対して，組合せ子 V_n は $CL(\mathsf{V}_n)$ 上で停止性をもつ．$\mathcal{R}(\mathsf{V}_n)$ が停止性をもたないと仮定する．このとき，無限書き換え列 $t_0 \to_{\mathcal{R}(\mathsf{V}_n)} t_1 \to_{\mathcal{R}(\mathsf{V}_n)} \cdots$ が存在する．$\mathcal{V}(t_0)$ に属するすべての変数を定数 V_n で置き換える代入 σ を考える．このとき，$t_0\sigma \to t_1\sigma \to \cdots$ より，組合せ子 V_n は $CL(\mathsf{V}_n)$ 上で停止性をもつことに矛盾する．よって，$\mathcal{R}(\mathsf{V}_n)$ は停止性をもつ． □

補題 17. 任意の $n \geq 2$ に対して，TRS $\mathcal{R}(\mathsf{C}_n) = \{\mathsf{C}_n xzy_1 \ldots y_n \to xy_1 \ldots y_n z\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}(\mathsf{C}_n)$ は停止性をもつ．

(証明) 補題 16 と同様に，$\mathcal{R}(\mathsf{C}_n)$ の書き換え規則を組合せ子論理の書き換え規則とみなして証明する．任意の $u_1, u_2, v_1, \ldots, v_n \in CL(Z)$ に対して，$|\mathsf{C}_n u_1 u_2 v_1 \ldots v_n| = 1 + |u_1| + |u_2| + |v_1| + \cdots + |v_n|$ かつ $|u_1 v_1 \ldots v_n u_2| = |u_1| + |v_1| + \cdots + |v_n| + |u_2|$ より，$|\mathsf{C}_n u_1 u_2 v_1 \ldots v_n| > |u_1 v_1 \ldots v_n u_2|$. 補題 16 と同様に，任意の $n \geq 2$ に対して，$\mathcal{R}(\mathsf{C}_n)$ は停止性を

表 3　一般的な組合せ子からなる TRS の停止性と関連する性質

組合せ子の書き換え規則	非循環性	非基礎ループ性	非ループ性	停止性
$\mathsf{B}_n x y_1 \ldots y_n z \to x(y_1 \ldots y_n z)$ $(n \geq 1)$	○	○	○	○
$\mathsf{V}_n x y_1 \ldots y_n z \to x z y_1 \ldots y_n$ $(n \geq 2)$	○	○	○	○
$\mathsf{C}_n x z y_1 \ldots y_n \to x y_1 \ldots y_n z$ $(n \geq 2)$	○	○	○	○
$\mathsf{W}_n x y_1 \ldots y_n z \to x y_1 \ldots y_n z z$ $(n \geq 1)$	×	×	×	×
$\Phi_n x y z w_1 \ldots w_n \to x(y w_1 \ldots w_n)(z w_1 \ldots w_n)$ $(n \geq 2)$	○	○	?	?
$\Phi_2 x y z w_1 w_2 \to x(y w_1 w_2)(z w_1 w_2)$	○ [10]	○ [10]	?	× [12]
$\mathsf{A}_n w z x_1 \ldots x_n \to z(w x_1 x_1 \ldots x_n) \ldots (w x_n x_1 \ldots x_n)$ $(n \geq 2)$	○	?	?	?
$\mathsf{A}_2 w z x_1 x_2 \to z(w x_1 x_1 x_2)(w x_2 x_1 x_2)$	○	× [7]	× [7]	× [7], [12]
$\mathsf{A}_3 w z x_1 x_2 x_3 \to z(w x_1 x_1 x_2 x_3)(w x_2 x_1 x_2 x_3)(w x_3 x_1 x_2 x_3)$	○	× [7]	× [7]	× [7], [12]

(○：成立（本研究），×：不成立（本研究），?：未解決)

もつ．□

命題 18. ([10])　組合せ子 Z の書き換え規則を $Zx_1 \ldots x_n \to t$ とするとき，任意の $u_i \in CL(Z)$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して，$|Zu_1 \ldots u_n| < |t\{x_1 := u_1, \ldots, x_n := u_n\}|$. このとき，組合せ子 Z は $CL(Z)$ 上の非循環性をもつ．

補題 19. 任意の $n \geq 2$ に対して，TRS $\mathcal{R}(\Phi_n) = \{\Phi_n x y z w_1 \ldots w_n \to x(y w_1 \ldots w_n)(z w_1 \ldots w_n)\}$ とする．このとき，$\mathcal{R}(\Phi_n)$ は非循環性をもつ．

(証明) 補題 16 と同様に，$\mathcal{R}(\Phi_n)$ の書き換え規則を組合せ子論理の書き換え規則とみなして証明する．任意の $u_1, u_2, u_3, v_1, \ldots, v_n \in CL(\Phi_n)$ に対して，$|\Phi_n u_1 u_2 u_3 v_1 \ldots v_n| = 1 + |u_1| + |u_2| + |u_3| + |v_1| + \cdots + |v_n|$. $|u_1(u_2 v_1 \ldots v_n)(u_3 v_1 \ldots v_n)| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + 2(|v_1| + \cdots + |v_n|)$. このとき，$|\Phi_n u_1 u_2 u_3 v_1 \ldots v_n| < |u_1(u_2 v_1 \ldots v_n)(u_3 v_1 \ldots v_n)|$ より，命題 18 から，任意の $n \geq 2$ に対して組合せ子 Φ_n は $CL(\Phi_n)$ 上の非循環性をもつ．補題 16 と同様に，任意の $n \geq 2$ に対して $\mathcal{R}(\Phi_n)$ は非循環性をもつ．□

次に，$n = 2, 3$ のとき，TRS $\mathcal{R}(\mathsf{A}_n)$ が停止性をもたないことを示すために，依存対に関する定義や命題を述べる．詳細は文献 [6], [14] を参照していただきたい．

$\mathcal{F}$ 上の TRS $\mathcal{R}$ に対して，**定義記号**の集合を $\mathcal{D} = \{l(\epsilon) \mid l \to r \in \mathcal{R}\}$ とし，$\mathcal{C} = \mathcal{F} \setminus \mathcal{D}$ を**構成子**の集合とする．任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して，$f^\sharp$ を f と同じ項数をもつ新しい**組記号**とし，$f^\sharp$ について F と表す．組記号の集合は $\mathcal{F}^\sharp$ により表す．$g \in \mathcal{D}$ を満たす $t = g(t_1, \ldots, t_m)$ ならば，$t^\sharp$ を $g^\sharp(t_1, \ldots, t_m)$ とする．

定義 20. (依存対 [6]) TRS $\mathcal{R}$ に対する**依存対**の集合を $DP(\mathcal{R}) = \{l^\sharp \to t^\sharp \mid l \to r \in \mathcal{R}, t \trianglelefteq r, t(\epsilon) \in \mathcal{D}\}$ とする．

定義 21. (鎖 [6]) $\mathcal{P}, \mathcal{R}$ を TRS とする．組の (無限) 列 $s_1 \to_{\mathcal{P}} t_1, s_2 \to_{\mathcal{P}} t_2, \ldots$ が $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$**-鎖**であることは，代入 σ が存在し，任意の $i \geq 1$ に対して $t_i\sigma \to^*_{\mathcal{R}} s_{i+1}\sigma$ が成り立つことと同値であると定義する．

命題 22. ([6]) TRS $\mathcal{R}$ が停止性をもつことと，無限 $(DP(\mathcal{R}), \mathcal{R})$-鎖が存在しないことは同値である．

依存対問題 (以下では DP 問題と省略する) は 2 つの TRS $\mathcal{P}$ と $\mathcal{R}$ から成る [6]．ここで，$\mathcal{P} = DP(\mathcal{R})$ である．すなわち，依存対問題の考え方は，依存対の集合 $\mathcal{P}$ と TRS $\mathcal{R}$ を一緒に取り扱い，かつ，$\to_{\mathcal{R}}$ を調べる代わりに無限 $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$-鎖が存在しないことを証明するものである．

定義 23. (ループをもつ DP 問題 [6])　DP 問題 $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ が**ループをもつ**ことと，以下の条件 (*) を満たす $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$-鎖 $s_1 \to_{\mathcal{P}} t_1, s_2 \to_{\mathcal{P}} t_2, \ldots$ が存在することは同値であると定義する．(*) 任意の $i \geq 1$ に対して $t_i\sigma \to^*_{\mathcal{R}} s_{i+1}\sigma$ かつある $k > 1$ に対して $s_1\sigma$ は $s_k\sigma$ に照合可能である．すなわち，ある代入 μ に対

して $s_1\sigma\mu = s_k\sigma$ が成り立つ．

命題 24. ([6]) TRS $\mathcal{R}$ がループをもつことと，DP 問題 $(DP(\mathcal{R}), \mathcal{R})$ がループをもつことは同値である．

補題 25. 任意の $n \geq 2$ に対して，TRS $\mathcal{R}(\mathsf{A}_n) = \{\mathsf{A}_n w z x_1 \ldots x_n \to z(wx_1x_1\ldots x_n)(wx_2x_1\ldots x_n)\ldots(wx_nx_1\ldots x_n)\}$ とする．特に，$n = 2, 3$ のとき，$\mathcal{R}(\mathsf{A}_n)$ は基礎ループ性をもつ，すなわち，停止性をもたない．また，任意の $n \geq 2$ に対して，$\mathcal{R}(\mathsf{A}_n)$ は非循環性をもつ．

(証明) 最初に，$n = 2, 3$ のとき，$\mathcal{R}(\mathsf{A}_n)$ が基礎ループをもつことを示す．この証明の前半では，中値記法の適用演算子 $\cdot$ の代わりに，項数 2 の前置記法の関数記号 a を使用する．

1. $n = 2$ のとき．

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{R}(\mathsf{A}_2) & = & \{a(a(a(a(\mathsf{A}_2, w), z), x_1), x_2) \\ & \to & a(a(z, a(a(a(w, x_1), x_1), x_2)), \\ & & a(a(a(w, x_2), x_1), x_2))\}.\end{array}$$

AProVE [7] を用いると，$\mathcal{R}(\mathsf{A}_2)$ の停止性が反証される．

$$\begin{array}{rl} & a(a(a(a(a(a(\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2) \\ \to & a(a(a(a(\mathsf{A}_2, a(a(a(\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2)), \\ & a(a(a(\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2)), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2) \\ \to & a(a(a(a(a(\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \\ & a(a(a(a(a(a(\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2)), \\ & a(a(a(a(a(a(\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2)).\end{array}$$

よって，$t = a(a(a(a(a(a(\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2), \mathsf{A}_2)$ とすると，$t \to^+_{\mathcal{R}(\mathsf{A}_2)} C[t]$．すなわち，$\mathcal{R}(\mathsf{A}_2)$ は基礎ループをもつから，停止性をもたない．

2. $n = 3$ のとき．

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{R}(\mathsf{A}_3) & = & \{a(a(a(a(a(\mathsf{A}_3, w), z), x_1), x_2), x_3) \\ & \to & a(a(a(z, a(a(a(a(w, x_1), x_1), x_2), x_3)), \\ & & a(a(a(a(w, x_2), x_1), x_2), x_3)), \\ & & a(a(a(a(w, x_3), x_1), x_2), x_3))\}.\end{array}$$

AProVE [7] を用いると，$\mathcal{R}(\mathsf{A}_3)$ の停止性が反証される．以下の項 t, t_1, t_2, t_3 は付録を参照して欲しい．$t \to_{DP(\mathcal{R}(\mathsf{A}_3))} t_1 \to_{DP(\mathcal{R}(\mathsf{A}_3))} t_2 \to_{DP(\mathcal{R}(\mathsf{A}_3))} t_3 \to_{DP(\mathcal{R}(\mathsf{A}_3))} t$ より，DP 問題 $(DP(\mathcal{R}(\mathsf{A}_3)), \mathcal{R}(\mathsf{A}_3))$ はループをもつ．命題 24 より，TRS $\mathcal{R}(\mathsf{A}_3)$ はループをもつ．

$$\begin{array}{rl} t & \to_{\mathcal{R}(\mathsf{A}_3)} C_1[t_1] \to^*_{\mathcal{R}(\mathsf{A}_3)} C_1[t_1] \to_{\mathcal{R}(\mathsf{A}_3)} C_1[C_2[t_2]] \\ & \to^*_{\mathcal{R}(\mathsf{A}_3)} C_1[C_2[t_2]] \to_{\mathcal{R}(\mathsf{A}_3)} C_1[C_2[C_3[t_3]]] \\ & \to^*_{\mathcal{R}(\mathsf{A}_3)} C_1[C_2[C_3[t_3]]] \to_{\mathcal{R}(\mathsf{A}_3)} C_1[C_2[C_3[C_4[t]]]].\end{array}$$

よって，$\mathcal{R}(\mathsf{A}_3)$ は基礎ループ $t \to^+_{\mathcal{R}(\mathsf{A}_3)} C[t]$ をもち，停止性をもたない．

次に，任意の $n \geq 2$ に対して $\mathcal{R}(\mathsf{A}_n)$ の非循環性を示す．補題 16 と同様に，$\mathcal{R}(\mathsf{A}_n)$ の書き換え規則を組合せ子論理の書き換え規則とみなして証明する．任意の $u_1, u_2, v_1, \ldots, v_n \in CL(\mathsf{A}_n)$ に対して，$|\mathsf{A}_n u_1 u_2 v_1 \ldots v_n| = 1 + |u_1| + |u_2| + |v_1| + \cdots + |v_n|$．$|u_2(u_1v_1v_1\ldots v_n)(u_1v_2v_1\ldots v_n)\ldots(u_1v_nv_1\ldots v_n)| = |u_2| + n|u_1| + (n+1)(|v_1| + \cdots + |v_n|)$．$|\mathsf{A}_n u_1 u_2 v_1 \ldots v_n| < |u_2(u_1v_1v_1\ldots v_n)(u_1v_2v_1\ldots v_n)\ldots(u_1v_nv_1\ldots v_n)|$ より，命題 18 から，任意の $n \geq 2$ に対して組合せ子 A_n は $CL(\mathsf{A}_n)$ 上で非循環性をもつ．補題 16 と同様に，$\mathcal{R}(\mathsf{A}_n)$ は非循環性をもつ．□

定理 26. 任意の $n \geq 1$ に対して，組合せ子 B_n は停止性をもつ．また，任意の $n \geq 2$ に対して，組合せ子 $Z \in \{\mathsf{V}_n, \mathsf{C}_n\}$ は停止性をもつ．さらに，$n = 2, 3$ のとき，組合せ子 A_n は基礎ループをもつ，すなわち，停止性をもたない．

定理 27. 任意の $n \geq 1$ に対して，組合せ子 $Z \in \{\mathsf{B}_n, \mathsf{W}_n\}$ は非循環性をもつ．また，任意の $n \geq 2$ に対して，組合せ子 $Z \in \{\mathsf{V}_n, \mathsf{C}_n, \Phi_n, \mathsf{A}_n\}$ は非循環性をもつ．

組合せ子の停止性，非循環性，非基礎ループ性については表 3 にまとめる．なお，表中では組合せ子の適用演算子 $\cdot$ は省略している．

任意の $n \geq 2$ に対して，組合せ子 $Z \in \{\Phi_n, \mathsf{A}_n\}$ が停止性をもつかもたないかどうかは不明である．組合せ子 Φ_2 が停止性をもたない [12], [13] ことから，Φ_n は停止性をもたないと予想する．また，補題 25 より組合せ子 $\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3$ が停止性をもたないことから，A_n は停止性をもたないと予想する．同様に，補題 25 より組合せ子 $\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3$ が非基礎ループ性をもたないことから，A_n は非基礎ループ性をもたないと予想する．

6 組合せ子 Φ_n の非基礎ループ性

本節では，任意の $n \geq 2$ に対して，組合せ子 Φ_n が非基礎ループ性をもつことを示す．本節の証明は，文献[10]，[19] の手法に基づいている．以下では，TRS $\mathcal{R}(\Phi_n) = \{\Phi_n xyzw_1 \ldots w_n \to x(yw_1 \ldots w_n)(zw_1 \ldots w_n)\}$ を中値記法の適用演算子 $\cdot$ の代わりに，項数 2 の中値記法の関数記号 $\circ$ を用いて以下の通りに表す：$\mathcal{R}(\Phi_n) = \{(\ldots((((\Phi_n \circ x) \circ y) \circ z) \circ w_1) \ldots) \circ w_n \to (x \circ (\ldots((y \circ w_1) \ldots) \circ w_n)) \circ (\ldots((z \circ w_1) \ldots) \circ w_n)\}$.

定義 28. (根記号のラベル [10]) $Z \in \{\Phi_n\}$ とする．$T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(\Phi_n))) \setminus \{Z\}$ に対するラベル付き項の**根記号のラベル**を次のように定義する：$t(\epsilon) = \circ_k$ のとき，$label(t) = k$.

定義 29. (ラベル付け 2 [10]) $Z \in \{\Phi_n\}$ とする．ラベル付け TRS $\mathcal{R}_m(Z)$ は無限の関数記号集合 $\{Z, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_m, \circ_{m+1}, \ldots\}$ をもつ．ここで，任意の $i \geq 1$ に対して $\circ_i$ は項数 2 のラベル付き関数記号である．ラベル付き TRS を $\mathcal{R}_m(Z) = \{L' \to R' \mid 1 \leq k \leq m, 1 \leq l\}$ と表す．

TRS $\mathcal{R}(Z) = \{L \to R\}$ の項数 2 の関数記号 $\circ$ に対するラベル付けは次の通りに行う．ここで，$1 \leq k \leq m, 1 \leq l$ とする．

(1) 左辺 L に対するラベル付け．$label(L') = k$ とし，L の根記号以外の関数記号 $\circ$ にはラベル l を付ける．

(2) 左辺 R に対するラベル付け．$label(R') = k+1$. $R|_1(\epsilon) = \circ$ ならば $label(R'|_1) = k+1$. $R|_2(\epsilon) = \circ$ ならば $label(R'|_2) = k$. 任意の $i \in \{11, 12\}$ に対して，$R|_i(\epsilon) = \circ$ ならば $label(R'|_i) = k$. それ以外の位置 $p \in Pos(R)$ に対して，$R|_p(\epsilon) = \circ$ ならば $label(R|_p) = l$.

例 30. 定義 29 のとおりに定義されるラベル付き TRS $\mathcal{R}_m(\Phi_n)$ は無限の関数記号集合 $\mathcal{F}(\mathcal{R}_m(\Phi_n)) = \{\Phi_n, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_m, \circ_{m+1}, \ldots\}$ をもつ：$\mathcal{R}_m(\Phi_n) = \{(\ldots((((\Phi_n \circ_l x) \circ_l y) \circ_l z) \circ_l w_1) \ldots) \circ_k w_n \to (x \circ_{k+1} (\ldots((y \circ_l w_1) \ldots) \circ_k w_n)) \circ_{k+1} (\ldots((z \circ_l w_1) \ldots) \circ_k w_n) \mid 1 \leq k \leq m, 1 \leq l\}$.

補題 31. 任意の $n \geq 2$ に対して，$Z \in \{\Phi_n\}$ とする．任意の $m \geq 1$ に対して，$\mathcal{R}_m(Z)$ は停止性をもつ．

(証明) 無限の関数記号集合 $\mathcal{F}(\mathcal{R}_m(Z))$ 上の整礎な半順序 $>$ を次のように与える：$\circ_1 > \circ_2 > \ldots > \circ_m > \circ_{m+1}$．このとき，再帰経路順序 $>_{rpo}$ [14] を用いて，$\mathcal{R}_m(Z)$ の停止性を示すことができる．いま $Z = \Phi_n$ とする．このとき，任意の $m \geq 1$ に対して，任意の $(\ldots((((\Phi_n \circ_l x) \circ_l y) \circ_l z) \circ_l w_1) \ldots) \circ_k w_n \to (x \circ_{k+1} (\ldots((y \circ_l w_1) \ldots) \circ_k w_n)) \circ_{k+1} (\ldots((z \circ_l w_1) \ldots) \circ_k w_n) \in \mathcal{R}_m(\Phi_n)$ について，$(\ldots((((\Phi_n \circ_l x) \circ_l y) \circ_l z) \circ_l w_1) \ldots) \circ_k w_n >_{rpo} (x \circ_{k+1} (\ldots((y \circ_l w_1) \ldots) \circ_k w_n)) \circ_{k+1} (\ldots((z \circ_l w_1) \ldots) \circ_k w_n)$ が成り立つことを m に関する帰納法により示す．

$m = 1$ のとき．$\mathcal{R}_1(Z) = \{(\ldots((((\Phi_n \circ_l x) \circ_l y) \circ_l z) \circ_l w_1) \ldots) \circ_1 w_n \to (x \circ_2 (\ldots((y \circ_l w_1) \ldots) \circ_1 w_n)) \circ_2 (\ldots((z \circ_l w_1) \ldots) \circ_1 w_n) \mid 1 \leq l\}$ より，$(\ldots((((\Phi_n \circ_l x) \circ_l y) \circ_l z) \circ_l w_1) \ldots) \circ_1 w_n >_{rpo} (x \circ_2 (\ldots((y \circ_l w_1) \ldots) \circ_1 w_n)) \circ_2 (\ldots((z \circ_l w_1) \ldots) \circ_1 w_n)$.

$m = j + 1$ のとき．$\mathcal{R}_{j+1}(\Phi_n) = \mathcal{R}_j(\Phi_n) \cup \{(\ldots((((\Phi_n \circ_l x) \circ_l y) \circ_l z) \circ_l w_1) \ldots) \circ_k w_n \to (x \circ_{k+1} (\ldots((y \circ_l w_1) \ldots) \circ_k w_n)) \circ_{k+1} (\ldots((z \circ_l w_1) \ldots) \circ_k w_n) \mid 1 \leq l\}$．帰納法の仮定から，任意の $L' \to R' \in \mathcal{R}_j(\Phi_n)$ に対して，$L' >_{rpo} R'$．さらに，$(\ldots((((\Phi_n \circ_l x) \circ_l y) \circ_l z) \circ_l w_1) \ldots) \circ_j w_n >_{rpo} (x \circ_{j+1} (\ldots((y \circ_l w_1) \ldots) \circ_j w_n)) \circ_{j+1} (\ldots((z \circ_l w_1) \ldots) \circ_j w_n)$．よって，$\mathcal{R}_{j+1}(\Phi_n)$ は停止性をもつ． □

定義 32. (右側の深さ [10]) $Z \in \{\Phi_n\}$ とする．このとき，$T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z)))$ または $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_m(Z)))$ における項の**右側の深さ**を次のように定義する：$rd(Z) = 0, rd(X \circ_l Y) = 1 + rd(Y)$.

補題 33. $Z \in \{\Phi_n\}$ とする．このとき，$T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_m(Z))) \ni X \to_{\mathcal{R}_m(Z)} Y$ ならば，$rd(X) \leq rd(Y)$.

(証明) $X = D[\Delta] = D[(\ldots((((\Phi_n \circ_l A) \circ_l B) \circ_l C) \circ_l E_1) \ldots) \circ_k E_n] \to^{\Delta}_{\mathcal{R}_m(\Phi_n)} D[(A \circ_{k+1} (\ldots((B \circ_l E_1) \ldots) \circ_k E_n)) \circ_{k+1} (\ldots((C \circ_l E_1) \ldots) \circ_k E_n)] = D[\Delta'] = Y$ とおき，基礎 Φ_n-文脈 $D[\,]$ の構造に関する帰納法により示す．

$D[\,] = \Box$ のとき．$rd(X) = 1 + rd(E_n), rd(Y) = 1 + rd((\ldots((C \circ_l E_1) \ldots) \circ_k E_n)) = 2 + rd(E_n)$ より明らか．

$D[\,] = X' \circ F[\,]$ のとき．帰納法の仮定から，$rd(X) = 1 + rd(F[\Delta]) \leq 1 + rd(F[\Delta']) = rd(Y)$.

$D[\,] = F[\,] \circ X'$ のとき．$rd(X) = 1 + rd(X') = rd(Y)$ より明らか． □

定義 34. (無矛盾性 [10]) $Z \in \{\Phi_n\}$ とする．次の条件が成立するとき，ラベル付き項 X が**無矛盾**であるという：$X' \neq Z$ である任意の $X' \trianglelefteq X$ に対して，$rd(X') \geq label(X')$.

補題 35. $Z \in \{\Phi_n\}$ とする．$X \in T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_m(Z)))$ が無矛盾であり，かつ，$X \to_{\mathcal{R}_m(Z)} Y$ ならば，Y は無矛盾である．

(証明) X が無矛盾であり，かつ $X = D[\Delta] = D[(\ldots((((\Phi_n \circ_l A) \circ_l B) \circ_l C) \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n] \to_{\mathcal{R}_m(Z)} D[(A \circ_{k+1} (\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n)) \circ_{k+1} (\ldots((C \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n)] = D[\Delta'] = Y$ とおき，基礎 Z-文脈 $D[\,]$ の構造に関する帰納法により，Y が無矛盾であることを示す．

1. $D[\,] = \square$ のとき．X の無矛盾性から，部分項 $A, B, C, E_1, \ldots, E_n$ は無矛盾である．よって，$rd(A \circ_{k+1} (\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n)) \geq label((A \circ_{k+1} (\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n))), rd((\ldots((C \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n)) \geq label((\ldots((C \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n)), rd((\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n)) \geq label((\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n)), \ldots, rd(B \circ_l E_1) \geq label(B \circ_l E_1), rd(C \circ_l E_1) \geq label(C \circ_l E_1), rd(Y) \geq label(Y)$ を示す必要がある．

X の無矛盾性から，$1 + rd(A) = rd(\Phi_n \circ_l A) \geq label(\Phi_n \circ_l A) = l, 1 + rd(B) = rd(((\Phi_n \circ_l A) \circ_l B)) \geq label(((\Phi_n \circ_l A) \circ_l B)) = l, 1 + rd(C) = rd((((\Phi_n \circ_l A) \circ_l B) \circ_l C) \geq label(((\Phi_n \circ_l A) \circ_l B) \circ_l C) = l, 1 + rd(E_1) = rd((((\Phi_n \circ_l A) \circ_l B) \circ_l C) \circ_l E_1) \geq label((((\Phi_n \circ_l A) \circ_l B) \circ_l C) \circ_l E_1) = l, 1 + rd(E_2) = rd(((((\Phi_n \circ_l A) \circ_l B) \circ_l C) \circ_l E_1) \circ_l E_2) \geq label(((((\Phi_n \circ_l A) \circ_l B) \circ_l C) \circ_l E_1) \circ_l E_2) = l, \ldots, 1 + rd(E_{n-1}) = rd((\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_l E_{n-1})) \geq label((\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_l E_{n-1})) = l, 1 + rd(E_n) = rd(X) \geq label(X) = k$.

このとき，以下の不等式が成立する．$rd(A \circ_{k+1} (\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n)) = 1 + rd((\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n)) = 2 + rd(E_n) \geq k+1 = label(A \circ_{k+1} (\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n))$．$rd((\ldots((C \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n)) = 1 + rd(E_n) \geq k = label((\ldots((C \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n))$．$rd((\ldots((C \circ_l E_1)\ldots) \circ_l E_{n-1})) = 1 + rd(E_{n-1}) \geq l = label((\ldots((C \circ_l E_1)\ldots) \circ_l E_{n-1})), \ldots, rd(C \circ_l E_1) = 1 + rd(E_1) \geq l = label(C \circ_l E_1)$．$rd((\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n)) = 1 + rd(E_n) \geq k = label((\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n))$．$rd((\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_l E_{n-1})) = 1 + rd(E_{n-1}) \geq label((\ldots((B \circ_l E_1)\ldots) \circ_l E_{n-1})), \ldots, rd(B \circ_l E_1) = 1 + rd(E_1) \geq l = label(B \circ_l E_1)$．$rd(Y) = 1 + rd((\ldots((C \circ_l E_1)\ldots) \circ_k E_n)) = 2 + rd(E_n) \geq k+1 = label(Y)$.

2. $D[\,] = X' \circ_p D'[\,]$ のとき．このとき，$X = X' \circ_p D'[\Delta]$ の無矛盾性から $X', D'[\Delta]$ は無矛盾である．また，$D'[\Delta]$ は無矛盾かつ $D'[\Delta] \to_{\mathcal{R}_m(Z)} D'[\Delta']$ であるから，帰納法の仮定より $D'[\Delta']$ も無矛盾である．よって，$rd(Y) \leq label(Y)$ を示せば十分である．いま，$D'[\Delta] \to_{\mathcal{R}_m(Z)} D'[\Delta']$ であるから，補題 33 より，$rd(D'[\Delta]) \leq rd(D'[\Delta'])$．よって，$rd(Y) = 1 + rd(D'[\Delta']) \geq 1 + rd(D'[\Delta]) = rd(X) \geq label(X) = p = label(Y)$.

3. $D[\,] = D'[\,] \circ_p X'$ のとき．このとき，$X = D'[\Delta] \circ_p X'$ の無矛盾性から $D'[\Delta], X'$ は無矛盾である．また，$D'[\Delta]$ は無矛盾かつ $D'[\Delta] \to_{\mathcal{R}_m(Z)} D'[\Delta']$ であるから，帰納法の仮定より $D'[\Delta']$ は無矛盾である．よって，$rd(Y) \geq label(Y)$ を示せば十分である．これは，$rd(X) \geq label(X)$ より $rd(Y) = 1 + rd(X') = rd(X)$ かつ $label(X) = label(Y)$ から明らか． □

定義 36. ([10]) $Z \in \{\Phi_n\}$ とする．写像 $tag : T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z))) \to T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_m(Z)))$ を，葉でない任意の部分項 X の根記号 $\circ$ をラベル付き記号 $\circ_{rd(X)}$ で置き換えると定義する．

定義 37. ([10]) $Z \in \{\Phi_n\}$ とする．写像 $forget : T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_m(Z))) \to T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z)))$ を，すべてのラベル付き記号 $\circ_l$ を $\circ$ で置き換えると定義する．

補題 38. $Z \in \{\Phi_n\}$ とする．ある $m \geq 1$ に対して，$T(\mathcal{F}(\mathcal{R}_m(Z))) \ni X \to_{\mathcal{R}_m(Z)} Y$ ならば，$forget(X) \to_{\mathcal{R}(Z)} forget(Y)$.

(証明) 定義 29 と定義 37 から，明らか． □

補題 39. $Z \in \{\Phi_n\}$ とする．項 $X \in T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z)))$ とラベル付き項 X' を考える．$forget(X') = X \to^{\triangle}_{\mathcal{R}(Z)}$

Y かつ X' が無矛盾ならば，$X' \to_{\mathcal{R}_{rd(\Delta)}(Z)} Y'$ かつ $forget(Y') = Y$ を満たす Y' が存在する．

(証明) $forget(X') = X \to^{\Delta}_{\mathcal{R}(Z)} Y$ より，$X = D[\Delta] \to^{\Delta}_{\mathcal{R}(Z)} D[\Gamma] = Y$ を満たす基礎 Z-文脈 $D[\,]$ が存在する．$\Delta = (\ldots((((\Phi_n \circ A) \circ B) \circ C) \circ E_1) \ldots) \circ E_n$ とする．$D[\Delta] = D[(\ldots((((\Phi_n \circ A) \circ B) \circ C) \circ E_1) \ldots) \circ E_n] \to^{\Delta}_{\mathcal{R}(Z)} D[(A \circ (\ldots((B \circ E_1) \ldots) \circ E_n)) \circ (\ldots((C \circ E_1) \ldots) \circ E_n)] = D[\Gamma]$．$X'$ が無矛盾より，$X'' \neq Z$ である任意の $X'' \trianglelefteq X'$ に対して，$rd(X'') \geq label(X'')$．$forget(X') = X = D[\Delta]$ より，$forget(\Delta') = \Delta$ を満たす $\Delta' \trianglelefteq X'$ が存在する．$forget(\Delta') = \Delta$ より，$\Delta' = (\ldots((((\Phi_n \circ_{L_1} A') \circ_{L_1} B') \circ_{L_1} C') \circ_{L_1} E'_1) \ldots) \circ_{L_2} E'_n$ とする．無矛盾な項の部分項は無矛盾より，$\Delta' \trianglelefteq X'$ に対して，$rd(\Delta') \geq label(\Delta')$．$label(\Delta') \leq rd(\Delta') = rd(\Delta)$．$L_2 = label(\Delta') \leq rd(\Delta)$ より，Δ' は $\mathcal{R}_{rd(\Delta)}(Z)$ のリデックスである．$\Delta' \trianglelefteq X'$ より，$X' = D'[\Delta']$ かつ $forget(D'[\,]) = D[\,]$ を満たすラベル付き基礎 Z-文脈 $D'[\,]$ が存在する．$Y' = D'[(A' \circ_{L_2+1} (\ldots((B' \circ_{L_1} E'_1) \ldots) \circ_{L_2} E'_n)) \circ_{L_2+1} (\ldots((C' \circ_{L_1} E'_1) \ldots) \circ_{L_2} E'_n)]$ とすると，$X' = D'[\Delta'] = D'[(\ldots((((\Phi_n \circ_{L_1} A') \circ_{L_1} B') \circ_{L_1} C') \circ_{L_1} E'_1) \ldots) \circ_{L_2} E'_n] \to_{\mathcal{R}_{rd(\Delta)}(Z)} = D'[(A' \circ_{L_2+1} (\ldots((B' \circ_{L_1} E'_1) \ldots) \circ_{L_2} E'_n)) \circ_{L_2+1} (\ldots((C' \circ_{L_1} E'_1) \ldots) \circ_{L_2} E'_n)] = D'[\Delta'] = Y'$ かつ $forget(Y') = D[(A \circ (\ldots((B \circ E_1) \ldots) \circ E_n)) \circ (\ldots((C \circ E_1) \ldots) \circ E_n)]$ を満たす． □

補題 40. $Z \in \{\Phi_n\}$ とする．$\mathcal{R}(Z)$ 上の有限または無限書き換え列 $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z))) \ni X_1 \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(Z)} X_2 \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(Z)} X_3 \to^{\Delta_3}_{\mathcal{R}(Z)} \cdots$ が存在し，任意の $k \geq 1$ に対して，$rd(\Delta_k) \leq m$ と仮定する．このとき，$X'_1 = tag(X_1)$ かつ任意の $k \geq 1$ に対して $forget(X'_k) = X_k$ を満たす $\mathcal{R}_m(Z)$ 上の有限または無限書き換え列 $X'_1 \to_{\mathcal{R}_m(Z)} X'_2 \to_{\mathcal{R}_m(Z)} X'_3 \to_{\mathcal{R}_m(Z)} \cdots$ が存在する．

(証明) 写像 tag と $forget$ の定義から，$forget(X'_1) = X_1$．また，X'_1 は定義から，無矛盾である．したがって，$X'_1 \to_{\mathcal{R}_m(Z)} X'_2 \to_{\mathcal{R}_m(Z)} \cdots \to_{\mathcal{R}_m(Z)} X'_i$，任意の $1 \leq k \leq i$ に対して $forget(X'_k) = X_k$ かつ X'_{i+1} は無矛盾性を満たす X'_{i+1} が存在することを示せば十分である．いま，仮定より，$forget(X'_i) = X_i, X_i \to^{\Delta_i}_{\mathcal{R}(Z)} X_{i+1}$ かつ X'_i が無矛盾であるから，補題 39 より，$X'_i \to^{\Delta_i}_{\mathcal{R}_{rd(\Delta_i)}(Z)} X'_{i+1}$ かつ $forget(X'_{i+1}) = X_{i+1}$ を満たす X_{i+1} が存在する．仮定 $rd(\Delta_i) \leq m$ より，$\mathcal{R}_{rd(\Delta_i)}(Z) \subseteq \mathcal{R}_m(Z)$．よって，$X'_i \to_{\mathcal{R}_m(Z)} X'_{i+1}$．また，$X'_i$ の無矛盾性と補題 35 より，X'_{i+1} は無矛盾である． □

補題 41. $Z \in \{\Phi_n\}$ とする．$\mathcal{R}(Z)$ 上の無限書き換え列 $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z))) \ni X_1 \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(Z)} X_2 \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(Z)} X_3 \to^{\Delta_3}_{\mathcal{R}(Z)} \cdots$ が存在すると仮定する．このとき，任意の $k \geq 1$ に対して $rd(\Delta_k)$ は有界ではない．

(証明) 任意の $k \geq 1$ に対して $rd(\Delta_k)$ は有界である，すなわち，任意の $k \geq 1$ に対して $rd(\Delta_k) \leq m$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ が存在すると仮定する．補題 40 より，$\mathcal{R}_m(Z)$ 上の無限書き換え列 $X'_1 \to_{\mathcal{R}_m(Z)} X'_2 \to_{\mathcal{R}_m(Z)} X'_3 \to_{\mathcal{R}_m(Z)} \cdots$ が存在する．しかしながら，補題 31 より，$\mathcal{R}_m(Z)$ は停止性をもつ．したがって，$\mathcal{R}_m(Z)$ は無限書き換え列をもたない．よって，矛盾する． □

定理 42. 任意の $n \geq 2$ に対して，$Z \in \{\Phi_n\}$ とする．TRS $\mathcal{R}(Z)$ は非基礎ループ性をもつ．

(証明) 基礎ループ $T(\mathcal{F}(\mathcal{R}(Z))) \ni X \to^{+}_{\mathcal{R}(Z)} C[X]$ が存在すると仮定する．このとき，$\mathcal{R}(Z)$ 上の無限書き換え列 $X = X_1 \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(Z)} X_2 \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(Z)} \cdots X_n \to^{\Delta_m}_{\mathcal{R}(Z)} C[X_1] \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(Z)} C[X_2] \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(Z)} \cdots C[X_n] \to^{\Delta_m}_{\mathcal{R}(Z)} C[C[X_1]] \to^{\Delta_1}_{\mathcal{R}(Z)} C[C[X_2]] \to^{\Delta_2}_{\mathcal{R}(Z)} \cdots$ が得られる．$\mathcal{R}(Z)$-リデックス Δ_k は有限個であるから，$rd(\Delta_k) \leq m_0$ を満たす $m_0 \in \mathbb{N}$ が存在する ($1 \leq k \leq m$)．これは補題 41 に矛盾する． □

7 まとめと今後の課題

本論文では，一般的な組合せ子からなる項書き換えシステム 6 例が ω-強頭部正規化可能性をもたないことを示した．また，3 例が停止性をもち，5 例が非循環性をもち，4 例が非基礎ループ性をもつことを示した．今後の課題は，停止性をもつことを証明することも反証することもできなかった 2 例に対して，停止性の証明または反証を行うことである．

謝辞 本研究について議論していただいた中野圭介氏 (東北大学) に感謝する．本研究の一部は科研費

22K11904 の助成を受けて行われた.

参考文献

[1] Barendregt, H. P. : *The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics*, Revised edition, North-Holland, 1985.

[2] Dauchet, M. : Simulation of Turing machines by a regular rewrite rule, *Theoretical Computer Science*, Vol. 103, 1992, pp. 409–420.

[3] Courcelle, B. : Fundamental properties of infinite trees, *Theoretical Computer Science*, Vol.25, No.2, 1983, pp. 95–169.

[4] Endrullis, J. and Zantema, H. : Proving non-termination by finite automata, *Proc. of the 26th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications*, RTA 2015, LIPIcs: Leibniz International Proceedings in Informatics, Vol. 36, 2015, pp. 160–176.

[5] Endrullis, J., Grabmayer, C., Hendriks, D., Klop, J. W. and de Vrijer, R. : Proving infinitary normalization, *Proc. International Conf. on Types for Proofs and Programs*, TYPES 2008, LNCS, 5497, 2009, pp.64–82.

[6] Giesl, J., Thiemann, R. and Schneider-Kamp, P. : Proving and disproving termination of higher-order function, *Proc. of the 5th International Workshop on Frontiers of Combining Systems*, FroCoS 2005, LNAI 3717, 2005 pp.216-231.

[7] Giesl, J. et al. : AProVE (AUTOMATED PROGRAM VERIFICATION ENVIRONMENT), Web Interface, `https://aprove.informatik.rwth-aachen.de/`

[8] Ikebuchi, M. and Nakano, K. : On properties of B-terms, *Logical Methods in Computer Science*, Vol. 16, Issue 2, 2020, pp. 8:1–8:23.

[9] 岩見宗弘 : 組合せ子の非循環性と関連する性質について, 情報処理学会論文誌プログラミング, Vol. 2, No.2, 2009, pp.97–104.

[10] 岩見宗弘 : 様々な組合せ子の非 ω-強頭部正規化可能性・非基礎ループ性・非循環性, 情報処理学会論文誌プログラミング, Vol.16, No.3, 2023, pp.14–27.

[11] 岩見宗弘, 青戸等人 : 無限項書き換えシステムにおける強頭部正規化可能性および一般生成性の自動反証, コンピュータソフトウェア, Vol.29, No.1, 2012, pp.211–239.

[12] Nakano, K. and Iwami, M. : Disproving termination of non-erasing sole combinatory calculus with tree automata, *Proc. of the 28th International Conf. on Implementation and Application of Automata*, CIAA 2024, LNCS, 15 pages, Springer-Verlag, to appear.

[13] Nakano, K. and Iwami, M. : Disproving termination of non-erasing sole combinatory calculus with tree automata (full version), arXiv:2406.14305v1, full version of [12], 20 pages, 2024.

[14] Ohlebusch, E. : *Advanced Topics in Term Rewriting*, Springer, 2002.

[15] Peyton Jones, S. L. : *The Implementation of Functional Programing Languages*, Prentice Hall, 1987.

[16] Smullyan, R. : *Diagonalization and Self-Reference*, Oxford University Press, 1994.

[17] Terese, *Term Rewriting Systems*, Cambridge University Press, 2003.

[18] Turner, D. A. : A new implementation technique for applicative languages, *J. of Software: Practice and Experience*, Vol. 9(1), 1979, pp.31–49.

[19] Waldmann, J. : The Combinator S, *Information and Computation*, Vol. 159(1–2), 2000, pp.2–21.

[20] Zantema, H. : Normalization of infinite terms, *Proc. of 19th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications*, RTA 2008, LNCS 5117, 2008, Springer-Verlag, pp. 441–445.

A 補題 25 の証明の補足

項 t, t_1, t_2, t_3 はそれぞれ下記の通りである.

$$
\begin{aligned}
t \quad &= A(a(a(a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z''),\\
&a(a(a(a(\mathsf{A}_3, x_1), x_1), x_4), x_3)),\\
&a(a(a(a(\mathsf{A}_3, a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3),\\
&a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)), x_1),\\
&a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)))),\\
&a(a(a(a(\mathsf{A}_3, a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')),\\
&x_1)), x_1),\\
&a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)),\\
&a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1))).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_1 \quad &= A(a(a(a(a(\mathsf{A}_3, w'), a(a(a(a(\mathsf{A}_3, a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3),\\
&a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)), x_1),\\
&a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)),\\
&a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1))),\\
&a(a(a(a(\mathsf{A}_3, x_1), x_1), x_4), x_3)),\\
&a(a(a(a(\mathsf{A}_3, a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')),\\
&x_1)), x_1),\\
&a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)))),\\
&a(a(a(a(\mathsf{A}_3, a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')),\\
&x_1)), x_1),\\
&a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)),\\
&(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1))).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_2 \quad &= A(a(a(a(a(\mathsf{A}_3, a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3),\\
&a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)), x_1),\\
&a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)),\\
&a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)),\\
&a(a(a(a(w', a(a(a(\mathsf{A}_3, x_1), x_1), x_4), x_3)),\\
&a(a(a(a(\mathsf{A}_3, x_1), x_1), x_4), x_3)), x4), x_3)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_3 \quad &= A(a(a(a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z''),\\
&a(a(a(a(\mathsf{A}_3, x_1), x_1), x_4), x_3)),\\
&a(a(a(a(\mathsf{A}_3, a(a(a(\mathsf{A}_3, A_3),\\
&a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)), x_1),\\
&a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)))),\\
&a(a(a(a(\mathsf{A}_3, a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3),\\
&a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)), x_1),\\
&a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1)),\\
&a(a(a(\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_3), a(a(\mathsf{A}_3, a(\mathsf{A}_3, w')), z'')), x_1))).
\end{aligned}
$$