論理制約付き項書き換えシステムにおける新しい制約付き項の書き換えの提案

高畑 幹汰　青戸 等人

等式論理に基づく基本的な項書き換えシステムでは扱いが難しい, 整数型といった帰納的な構造を持たないデータ型を扱う仕組みを持つ項書き換えの体系として, 論理制約付き項書き換えシステム (LCTRS) が提案されている (Nishida & Kop, 2013). LCTRS では通常の項の書き換えの他に, 制約付き項の書き換えが考えられている. しかし, 通常の項の書き換えと異なり, 等価変換が定義に組み込まれているため, 制約付き項の書き換えの計算は容易でない. また, 同一の規則を用いて同一の位置で書き換えたとしても書き換えの結果が一意に定まらない, 書き換えの前に等価変形を行わないと書き換えられない場合もある等, 取り扱いが困難である. そこで, 本稿では制約付き項の定義やその書き換えの定義を見直し,LCTRS における新しい制約付き項とその書き換えを提案する. また, 等価関係の定義から自然に導かれる擬順序を用いて従来の制約付き項の書き換えと新しい制約付き項の書き換えの間の関係を示す.

1　はじめに

項書き換えシステムは等式論理に基づく計算モデルである. 項書き換えシステムは純粋に形式的なモデルであるため，整数や浮動小数点といった帰納的な構造を持たないデータ型の扱いが困難である. そのため，それらの取り扱いを容易にするために，論理制約付き項書き換えシステム (LCTRS) が提案されている [2]. また，合流性や完備化，書き換え帰納法などの研究が進められている [1] [3] [4] [5].

LCTRS では通常の項の書き換えの他に，制約付き項の書き換えが考えられている. 制約付き項は項と論理制約の対で与えられる. 制約付き項の書き換えには，通常の後の書き換えと異なり，等価変換が定義に組み込まれているため，書き換えの計算が容易でない. また，同一の規則を用いて同一の位置で書き換えたとしても書き換えの結果が一意に定まらないことや書き換えの前に等価変換を行わないと書き換えができない場合もある等，取り扱いが困難である. 制約付き項における書き換えの結果が一意に定まらないような例を以下に示す.

例 1.1. 以下のような規則を考える.

$$f(x) \to g(y)[x \geq 0]$$

この規則を用いて，$f(x)[x \geq 0]$ という制約付き項の書き換えを考える. すぐに書き換える場合は以下のような項を考えることができる.

$$f(x)[x \geq 0] \to_{\mathsf{rule}} g(x)[x \geq 0]$$

また，具体的な数値を直接入れてしまっても，問題ない.

$$f(x)[x \geq 0] \to_{\mathsf{rule}} g(3)[x \geq 0]$$

書き換える前に制約付き項における等価関係を用いて等価変換を行ったあと，書き換えることもできる. 例えば，変数と制約を増やした後に書き換えることもできる.

$$\begin{aligned} f(x)[x \geq 0] \quad &\sim \quad f(x)[x \geq 0 \wedge y < 0] \\ &\to_{\mathsf{rule}} \quad g(y)[x \geq 0 \wedge y < 0] \end{aligned}$$

また，関係のない変数を加えることもできる.

$$\begin{aligned} f(x)[x \geq 0] \quad &\sim \quad f(x)[x \geq 0 \wedge y = -3 \wedge z > \pi] \\ &\to_{\mathsf{rule}} \quad g(y)[x \geq 0 \wedge y = -3 \wedge z > \pi] \end{aligned}$$

等価変換を行ってから書き換えることで，書き換え結果に無限のバリエーションを生み出すことができる. 同様に書き換えた後の結果に対して，等価変換を行う

* A New Format of Rewriting for Constrained Terms in Logically Constrained Term Rewriting Systems.

Kanta Takahata, Takahito Aoto, 新潟大学大学院自然科学研究科, Graduate School of Science and Technology, Niigata University.

ことでも無限のバリエーションを得ることができる．

このように，制約付き項の書き換えは計算結果が一意に定まらず，また一つの項から同じ規則で書き換えられた項同士が等価関係を満たすとも限らない．

本稿では新しい制約付き項の枠組みとして，**存在制約付き項**とその書き換えを提案する．存在制約付き項のアイデアは，制約付き項の論理制約に存在量化子をつけることで，論理制約のみに出現する変数を束縛することにある．この意図するところは書き換えを制限して，より性質のいい書き換え関係を構成することにある．また，書き換えを行うことで変数が新しく出現したり，あるいはなくなってしまうような場合でも破綻しないように書き換えを再定義する．そして，存在制約付き項の書き換えと通常の制約付き項の書き換えを，等価関係から自然に導かれる擬順序を用いて，従来の制約付き項の書き換えと存在制約付き項の書き換えの間の関係を示す． 本稿の構成は以下の通りである．第 2 節は準備である．第 3 節では，存在制約付き項の定義とその等価関係，書き換え関係を示す．第 4 節では従来の制約付き項の書き換えと新しく定義した存在制約付き項の書き換えの関係性を示す．第 5 節は，本稿のまとめである．

2 準備

2.1 論理制約付き項書き換えシステム

多ソート関数記号の集合 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{terms}} \uplus \mathcal{F}_{\text{theory}}$ で与えられる．また，全てのソート ι について，それぞれのソートは値の集合 $\mathcal{V}al_\iota$ を持ち，$\mathcal{V}al_\iota \subseteq \mathcal{F}_{\text{theory}}$ である．また，値の全体集合は $\mathcal{V}al = \bigcup_\iota \mathcal{V}al_\iota$ で定義される．変数の集合は $\mathcal{V}$ で表され，$\mathcal{V} \cap \mathcal{F} = \emptyset$ である．項の全体集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と記す．$\mathcal{M} = \langle \mathcal{I}, \mathcal{J} \rangle$ を $\mathcal{F}_{\text{theory}}$ 上のモデルとする．ここで，$\mathcal{I}(\iota)$ はソート ι の台集合を，$\mathcal{J}(f)$ は $f \in \mathcal{F}_{\text{theory}}$ の解釈を与える．ここで，$\mathcal{I}(\iota) \cong \mathcal{V}al_\iota$ と仮定する．また，$\mathcal{T}(\mathcal{F}_{\text{theory}}, \mathcal{V})$ は論理項と呼ぶ．また論理項のうち，ソートが bool なものを論理制約と呼ぶ．論理制約 φ が妥当であるとは，$\mathcal{M}$ 上の任意の付値 ρ について，$[\![\varphi]\!]_\rho = \mathsf{True}$ となるときであり，$\mathcal{M} \vDash \varphi$ と記す．制約付き規則は，l，$r \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と論理制約 φ を用いて，$l \to r[\varphi]$ の三つ組で定義される．ただし，$l(\epsilon) \in \mathcal{F}_{\text{terms}} \setminus \mathcal{F}_{\text{theory}}$．また，制約付き規則 $l \to r[\varphi]$ の論理変数は $\mathcal{LV}ar(l \to r[\varphi]) = \mathrm{Var}(\varphi) \setminus (\mathrm{Var}(r) \setminus \mathrm{Var}(l))$ と定義される．同様に $\mathcal{EV}ar(l \to r[\varphi]) = \mathrm{Var}(r) \setminus (\mathrm{Var}(l) \cup \mathrm{Var}(\varphi))$ と定義する． 代入 γ が規則を respect するとは，以下の 3 つの条件を満たすときである． 1. $\mathrm{dom}(\gamma) = \mathrm{Var}(l) \cup \mathrm{Var}(r) \cup \mathrm{Var}(\varphi)$, 2. 任意の変数 $x \in \mathcal{LV}ar(l \to r[\varphi])$ について，$\gamma(x) \in \mathcal{V}al$, 3. $\mathcal{M} \vDash \varphi\gamma$. このとき，$\gamma \vDash l \to r[\varphi]$ と表記する．

関数記号の集合 $\mathcal{F}$, モデル $\mathcal{M}$, 制約付き規則の集合 $\mathcal{R}$ の 3 つ組 $\langle \mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{R} \rangle$ を LCTRS と呼ぶ．

2.2 制約付き項

制約付き項は項と論理制約の対で与えられ，項 s と論理制約 φ を用いて，$s[\varphi]$ で表される．代入 γ が論理制約 φ を respect するとは，以下の 2 つの条件を満たすときをいう．1. 任意の変数 $x \in \mathrm{Var}(\varphi)$ について，$\gamma(x) \in \mathcal{V}al$, 2. $\mathcal{M} \vDash \varphi\gamma$. このとき，$\gamma \vDash \varphi$ と表記する．制約付き項 $s[\varphi]$，$t[\psi]$ が等価関係にあるとは，$\gamma \vDash \varphi$ を満たす任意の代入 γ について，$\delta \vDash \psi$ を満たす代入が存在し，$s\gamma = t\delta$ を満たし，またその逆も成り立つときである．このとき，$s[\varphi] \sim t[\psi]$ と表記する．制約付き項上の書き換え $s[\varphi] \to_{\mathsf{rule}} t[\psi]$ と $s[\varphi] \to_{\mathsf{calc}} t[\psi]$ について定義する．制約付き項 $s[\varphi]$，$t[\psi]$ について，$s[\varphi] \to_{\mathsf{rule}} t[\psi]$ とは，以下をみたす $l \to r[\pi] \in \mathcal{R}$, γ が存在するときをいう．

- φ が充足可能で $\varphi = \psi$,
- $s = C[l\sigma]$，$t = C[r\sigma]$,
- $\mathrm{dom}(\gamma) = \mathrm{Var}(l) \cup \mathrm{Var}(r) \cup \mathrm{Var}(\pi)$,
- 任意の $x \in \mathcal{LV}ar(l \to r[\pi])$ について，$\gamma(x) \in \mathcal{V}al \cup \mathrm{Var}(\varphi)$,
- $\mathcal{M} \vDash \varphi \Rightarrow (\pi\gamma)$.

制約付き項 $s[\varphi]$，$t[\psi]$ について，$s[\varphi] \to_{\mathsf{calc}} t[\psi]$ とは以下を満たすときをいう．

- 関数記号 $f \in \mathcal{F}_{\text{theory}} \setminus \mathcal{F}_{\text{terms}}$ と，$s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{V}al \cup \mathrm{Var}(\varphi)$ を用いて，$s = C[f(s_1, \ldots, s_n)]$,
- 新しい変数 x を用いて，$t = C[x]$,
- $\psi = (\varphi \wedge x = f(s_1, \ldots, s_n))$.

ここで，制約付き項上の書き換えについて $\to_{\mathcal{R}} = \to_{\mathsf{rule}} \cup \to_{\mathsf{calc}}$, $\xrightarrow{\sim}_{\mathcal{R}} = \sim \circ \to_{\mathcal{R}} \circ \sim$ のように定義する．

3 存在制約付き項の等価関係と書き換え関係

第 3 節では存在制約付き項とその書き換え，等価関係を定義する．また Rule 書き換え，Calc 書き換えそれぞれについて，制約付き項における書き換えと存在制約付き項における書き換えの間の関係を等価関係の定義から自然に導かれる擬順序を用いて示す．

3.1 存在制約付き項

定義 3.1 (存在量化子付き論理制約)**.** 存在量化子付き論理制約とは $\exists x_1, \ldots, x_n.\varphi$ の形の述語論理式をいう ($n \geq 0$). ここで，φ は論理制約であり，$x_1, \ldots, x_n$ は $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathrm{Var}(\varphi)$ を満たす．以降では，略記のために変数列 $x_1, \ldots, x_n$ を $\vec{x}$ のように表現する．

また存在量化子付き論理制約について，自由変数 $\mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi)$ と束縛変数 $\mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi)$ をそれぞれ以下のように定義する．

- $\mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi) = \mathrm{Var}(\varphi) \setminus \{\vec{x}\}$.
- $\mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi) = \{\vec{x}\}$.

定義 3.2 (存在制約付き項)**.** 存在制約付き項 (Existential Constrained Term) とは $s[\exists\vec{x}.\varphi]$ のように表される，項と存在量化子付き論理制約の対で，以下の条件を満たすものをいう:

- s は項，$\exists\vec{x}.\varphi$ は存在量化子付き論理制約.
- $\mathrm{Var}(s) \supseteq \mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi)$.
- $\mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi) \cap \mathrm{Var}(s) = \emptyset$.

例 3.3 に存在制約付き項でない例と存在制約付き項である例を示す．例にある通り，通常の制約付き項でも存在制約付き項の条件を満たすこともある．

例 3.3. 存在制約付き項でない例

$$f(x)[x = 3 \wedge y = y] \quad f(x)[\exists\vec{x}.x = 3 \wedge y = 2]$$
$$g(x, y)[x = 2z \vee y = 3z] \quad h[\exists\vec{y}.x \geq 0]$$

左上，左下， 右下の項は，存在制約付き項の自由変数と項の変数集合の関係の定義に反している．さらに，右下の項は存在量化子付き論理制約の定義に反している．右上の項は束縛変数と項の変数集合の重なる部分がないという条件に反している．

存在制約付き項の例

$$f(x)[\exists y.x = 3 \wedge y = y] \quad f(x)[x = 3]$$
$$g(x, y)[\exists z.x = 2z \vee y = 3z] \quad h[\exists x.x \geq 0]$$

補題 3.4. 任意の存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$ について，$\mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi) = \mathrm{Var}(\varphi) \setminus \mathrm{Var}(s)$.

(証明). ($\subseteq$) 定義より，$\mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi) \cap \mathrm{Var}(s) = \emptyset$. また $\mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi) \subseteq \mathrm{Var}(\varphi)$ より，$\mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi) \subseteq \mathrm{Var}(\varphi) \setminus \mathrm{Var}(s)$.

($\supseteq$) $y \in \mathrm{Var}(\varphi) \setminus \mathrm{Var}(s)$ について考える．定義より，$\mathrm{Var}(s) \supseteq \mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi)$ が言えるので，$y \notin \mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi)$. つまり，$y \in \mathrm{Var}(\varphi) \setminus \mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi) = \mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi)$. 以上より，$\mathrm{Var}(\varphi) \setminus \mathrm{Var}(s) \subseteq \mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi)$ が言える． したがって，$\mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi) = \mathrm{Var}(\varphi) \setminus \mathrm{Var}(s)$. □

補題 3.5. 任意の存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$ について，$\mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi) = \mathrm{Var}(\varphi) \cap \mathrm{Var}(s)$.

(証明). ($\subseteq$) 定義より，$\mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi) = \mathrm{Var}(\varphi) \setminus \{\vec{x}\}$. つまり，$\mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi) \subseteq \mathrm{Var}(\varphi)$. また，$\mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi) \subseteq \mathrm{Var}(s)$. したがって，$\mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi) \subseteq \mathrm{Var}(\varphi) \cap \mathrm{Var}(s)$.

($\supseteq$) $y \in \mathrm{Var}(\varphi) \cap \mathrm{Var}(s)$ について考える．定義より，$\mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi) \cap \mathrm{Var}(s) = \emptyset$ が言えるので，$y \notin \mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi)$. つまり，$y \in \mathrm{Var}(\varphi) \setminus \mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi) = \mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi)$. 以上より，$\mathrm{Var}(\varphi) \cap \mathrm{Var}(s) \subseteq \mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi)$ が言える．

したがって，$\mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi) = \mathrm{Var}(\varphi) \cap \mathrm{Var}(s)$. □

次に，制約付き項と存在制約付き項の変換を定義する．

定義 3.6 (通常の制約付き項から存在制約付き項への変換)**.** 制約付き項から，存在制約付き項への変換 ext を $ext(s[\varphi]) = s[\exists\vec{x}.\varphi]$ により定義する．ここで，$\{\vec{x}\} = \mathrm{Var}(\varphi) \setminus \mathrm{Var}(s)$. この変換を Existential Extension Transformation(EE 変換) と呼ぶ．

逆に，存在制約付き項から，制約付き項への変換 rmv を $rmv(s[\exists\vec{x}.\varphi]) = s[\varphi]$ と定義し，Existential Removal Transformation(ER 変換) と呼ぶ．

例 3.7. $f(x, y)[z = x + y \wedge w \geq 0]$ という制約付き項の，存在制約付き項への変換を考えると，以下のよ

うになる

$$ext(f(x,y)[z=x+y]) = f(x,y)[\exists z.z=x+y]$$

逆に, 存在制約付き項 $f(x,y)[\exists z,w.z=x+y\wedge w\geq 0]$ を制約付き項へ変換すると，以下のようになる．

$$rmv(f(x,y)[\exists z.z=x+y]) = f(x,y)[z=x+y]$$

補題 3.8. 制約付き項 $s[\varphi]$ について，

$$rmv(ext(s[\varphi])) = s[\varphi]$$

が成立する．同様に，存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$ について，

$$ext(rmv(s[\exists\vec{x}.\varphi])) = s[\exists\vec{x}.\varphi]$$

が成立する．

(証明)．$rmv(ext(s[\varphi])) = s[\varphi]$ は自明.

$ext(rmv(s[\exists\vec{x}.\varphi])) = s[\exists\vec{x}.\varphi]$ について考える．定義より，$rmv(s[\exists\vec{x}.\varphi]) = s[\varphi]$. また，$ext(s[\varphi]) = s[\exists\vec{y}.\varphi]$. ここで，$\{\vec{x}\} = \{\vec{y}\}$ となれば良い． 補題 3.4 より，$\mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi) = \mathrm{Var}(\varphi)\setminus\mathrm{Var}(s)$. また，$\{\vec{x}\} = \mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi)$ より，$\{\vec{x}\} = \mathrm{Var}(\varphi)\setminus\mathrm{Var}(s)$. 変換の定義より，$\{\vec{y}\} = \mathrm{Var}(\varphi)\setminus\mathrm{Var}(s)$. したがって，$ext(rmv(s[\exists\vec{x}.\varphi])) = s[\exists\vec{x}.\varphi]$. □

3.2 存在制約付き項の等価関係

代入 γ が存在量化付き論理制約 $\exists\vec{x}.\varphi$ を respect するとは，以下の 2 つの条件を満たすときである．

1. 任意の変数 $x\in\mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi)$ について，$\gamma(x)\in\mathcal{V}al$
2. $\mathcal{M}\vDash(\exists\vec{x}.\varphi)\gamma$

なお，$\vec{x}=\epsilon$ のとき，代入 γ が論理制約 φ を respect することの従来の定義と同値になることに注意する．このとき，$\gamma\vDash\exists\vec{x}.\varphi$ と記す.

定義 3.9 (存在制約付き項における等価関係)**.** 存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$, $t[\exists\vec{y}.\psi]$ が等価関係にあるとは，任意の $\gamma\vDash\exists\vec{x}.\varphi$ を満たす代入 γ について，ある $\delta\vDash\exists\vec{y}.\psi$ を満たす代入 δ が存在し $s\gamma = t\delta$ を満たし，またその逆も同様に言えるときをいう. このとき $s[\exists\vec{x}.\varphi]\sim t[\exists\vec{y}.\psi]$ と記す.

また，制約付き項と存在制約付き項の間の等価関係も同様に定義する．

例 3.10 は存在制約付き項における等価関係の例である．

例 3.10.

$$\begin{aligned} & f(x)[\exists y.x=3\wedge y=y] \\ \sim\quad & f(z)[\exists x,y.x=3\wedge y=y\wedge z=x] \end{aligned}$$

補題 3.11. 制約付き項 $s[\varphi]$ とその存在制約付き項への変換 $ext(s[\varphi])$ について，以下の関係が成立する．

$$s[\varphi]\sim ext(s[\varphi])$$

同様に，存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$ とその制約付き項への変換 $rmv(s[\exists\vec{x}.\varphi])$ について以下の関係が成立する．

$$s[\exists\vec{x}.\varphi]\sim rmv(s[\exists\vec{x}.\varphi])$$

(証明)．$s[\varphi]\sim ext(s[\varphi])$ について考える. ここで，$ext(s[\varphi]) = s[\exists\vec{x}.\varphi]$ とする．任意の $\gamma\vDash\varphi$ を満たす代入 γ は $\gamma\vDash\exists\vec{x}.\varphi$ も満たす. 当然，$s\gamma = s\gamma$.

逆に，任意の $\delta\vDash\exists\vec{x}.\varphi$ を満たす代入 δ を考える. このとき解釈の定義より，ある $a_1,\ldots,a_n\in|\mathcal{M}|$ が存在して，$\delta\vDash_\rho\varphi$. ただし，$\rho=\{x_i\mapsto a_i\mid 1\leq i\leq n\}$. ここで，$|\mathcal{M}|=\mathcal{V}al$ に注意すると，$\delta'\vDash\varphi$ を満たすような代入 δ' を $\delta'=\delta\circ\{x_1\mapsto a_1,\ldots,x_n\mapsto a_n\}$ のように取れる. ここで，$\{x_1,\ldots,x_n\}=\{\vec{x}\}$. $\mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi)\cap\mathrm{Var}(s)=\emptyset$, $\mathrm{BV}(\exists\vec{x}.\varphi)=\{\vec{x}\}$ より，$s\delta = s\delta'$. したがって，$s[\varphi]\sim ext(s[\varphi])$ が示せた.

$s[\exists\vec{x}.\varphi]\sim rmv(s[\exists\vec{x}.\varphi])$ についても同様に示せる． □

ここで等価関係 $\sim$ を分解し，一方向のみの条件を考える．

定義 3.12 (制約を弱める関係)**.** 制約付き項 $s[\varphi]$, $t[\psi]$ について，$\gamma\vDash\varphi$ を満たす任意の代入 γ について，$\delta\vDash\psi$ を満たす代入 δ が存在し $s\gamma=t\delta$ となるとき，$s[\varphi]\precsim t[\psi]$ と表記する．存在制約付き項についても同様に定義し，制約付き項と存在制約付き項の間でも同様に定義する．

直観的には $\precsim$ は制約を弱める関係になっている．

例 3.13. 存在制約付き項 $g(x)[x>0]$, $g(y)[\exists x.x>0\wedge y=y]$ は以下のような関係にある．

$$g(x)[x>0]\precsim g(y)[\exists x.x>0\wedge y=y]$$

補題 3.14. $\precsim$ は擬順序関係である．

(証明)．定義より自明. □

補題 3.15. 以下の関係が成立する．

$$\succsim\cap\precsim\,=\,\sim$$

(証明). 制約付き項 $s[\varphi]$, $t[\psi]$ について, $s[\varphi] \precsim t[\psi]$ かつ $t[\psi] \precsim s[\varphi]$ が成立することを仮定する. 定義より, $\gamma \vDash \varphi$ を満たすような代入 γ に対して, $\delta \vDash \psi$ を満たすような代入 δ が存在し $s\gamma = t\delta$ を満たす, かつ, $\delta \vDash \psi$ を満たすような代入 δ に対して, $\gamma \vDash \varphi$ を満たすような代入 γ が存在し $t\delta = s\gamma$ を満たす. これは制約付き項における等価関係の定義と同じなので, $s[\varphi] \sim t[\psi]$. □

3.3 存在制約付き項の書き換え

定義 3.16 (存在制約付き項における Rule 書き換え)**.** 存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$ がある規則 $\rho : l \to r[\pi] \in \mathcal{R}$ を用いて $t[\exists\vec{y}.\psi]$ へ書き換えられるとは, ある文脈 C と代入 γ が存在し, $s = C[l\gamma]$, $t = C[r\gamma]$ を満たしかつ以下を満たすときである. ただし一般性を失うことなく, $\pi = \pi_1 \wedge \pi_2$, $\pi_1 = \pi \downharpoonright \mathrm{Var}(l)$, $\mathrm{Var}(\rho) \cap (\mathrm{Var}(s) \cup \mathrm{Var}(\varphi)) = \emptyset$ を仮定する. つまり, π_1 は制約 π を CNF で表したとき, 変数として l に出現する変数しか含まない節の論理積を表す.

- $\mathrm{dom}(\gamma) = \mathrm{Var}(l)$,
- $x \in \mathrm{dom}(\gamma)$ について, $\gamma(x) \in \mathcal{V}al \cup \mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi)$,
- $\psi = \varphi \wedge \bigwedge_{y \in \mathcal{EV}ar(\rho)} y = y \wedge \pi_2\gamma$,
- $\{\vec{y}\} = \mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{Var}(t)$,
- $\exists\vec{x}.\varphi$ が充足可能かつ, $\mathcal{M} \vDash (\exists\vec{x}.\varphi) \Rightarrow \pi_1\gamma$.

このとき, $s[\exists\vec{x}.\varphi] \to_{\mathsf{rule}} t[\exists\vec{y}.\psi]$ と表記する.

例 3.17.

$$f(x') \to g(y', z')[x' \geq 0 \wedge z' > 3]$$

という規則において, $f(x)[x > 0]$ という存在制約付き項の書き換えを考える. このとき, $f(x)[x > 0]$ は以下のように書き換えられる.

$$\begin{array}{rl} & f(x)[x > 0] \\ \to_{\mathsf{rule}} & g(y', z')[\exists x. x > 0 \wedge y' = y' \wedge z' > 3] \end{array}$$

例 3.18.

$$f(x') \to g(y')[x' \leq y']$$

という規則を用いて, 制約付き項 $f(x)[x \geq 0]$ を書き換えたいとする. このとき, 書き換えるためには,

$$\mathcal{M} \vDash \ x \geq 0 \Rightarrow x \leq t \tag{1}$$

なる項 t を見つける必要がある. 例えば, $t := x$ を取れば, 式 (1) は成立するので, 以下のように書き換えられる.

$$f(x)[x \geq 0] \to_{\mathsf{rule}} g(x)[x \geq 0]$$

また, $t := x + 1$ でも式 (1) は成立する. したがって, 以下のように書き換えることもできる.

$$\begin{array}{rcl} f(x)[x \geq 0] & \sim & f(x)[x \geq 0 \wedge y = x + 1] \\ & \to_{\mathsf{rule}} & g(y)[x \geq 0 \wedge y = x + 1] \end{array}$$

同様に, $y = x + k$ $(k \geq 0)$ など, 無限に取り得る.

一方で, 存在制約付き項 $f(x)[x \geq 0]$ を書き換えたいとすると, 以下のように機械的に書き換えることができる.

$$f(x)[x \geq 0] \to_{\mathsf{rule}} g(y')[\exists x. x \geq 0 \wedge x \leq y']$$

補題 3.19. 存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$ について, ある規則 $\rho : l \to r[\pi]$ を用いて, $s[\exists\vec{x}.\varphi] \to_{\mathsf{rule}} t[\exists\vec{y}.\psi]$ と書き換えられるならば, $t[\exists\vec{y}.\psi]$ は存在制約付き項である.

(証明). 存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$ と項 t, 存在量化子付き論理制約 $\exists\vec{y}.\psi$ からなる項 $t[\exists\vec{y}.\psi]$ について, 文脈 C と代入 γ を用いて, $s = C[l\gamma]$, $t = C[r\gamma]$ と書け, 以下の条件を満たすとする.

$$\begin{array}{rcl} \pi & = & \pi_1 \wedge \pi_2 \\ \mathrm{Var}(\pi_1) & \subseteq & \mathrm{Var}(l) \\ \mathrm{dom}(\gamma) & = & \mathrm{Var}(l) \\ \psi & = & \varphi \wedge \bigwedge\limits_{y \in \mathcal{EV}ar(\rho)} y = y \wedge \pi_2\gamma \\ \{\vec{y}\} & = & \mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{Var}(t) \\ \mathcal{M} \vDash (\exists\vec{x}.\varphi) & \Rightarrow & \pi_1\gamma \end{array}$$

このとき, $t[\exists\vec{y}.\psi]$ が存在制約付き項の条件を満たすことを示す.

$\mathrm{BV}(\exists\vec{y}.\psi) = \mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{Var}(t)$ より, $\mathrm{BV}(\exists\vec{y}.\psi) \cap \mathrm{Var}(t) = \emptyset$. したがって, $\mathrm{FV}(\exists\vec{y}.\psi) \subseteq \mathrm{Var}(t)$ を示せば良い. $\mathrm{FV}(\exists\vec{y}.\psi) = \mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{BV}(\exists\vec{y}.\psi)$ より, $\mathrm{FV}(\exists\vec{y}.\psi) = \mathrm{Var}(\psi) \setminus (\mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{Var}(t))$. ここで, $\mathrm{Var}(\psi) \setminus (\mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{Var}(t)) = \mathrm{Var}(\psi) \cap \mathrm{Var}(t)$ より, $\mathrm{FV}(\exists\vec{y}.\psi) = \mathrm{Var}(\psi) \cap \mathrm{Var}(t) . \mathrm{BV}(\exists\vec{y}.\psi) \cap \mathrm{Var}(t) = \emptyset$ より, $\mathrm{FV}(\exists\vec{y}.\psi) = \mathrm{FV}(\exists\vec{y}.\psi) \cap \mathrm{Var}(t)$. したがって, $\mathrm{FV}(\exists\vec{y}.\psi) \subseteq \mathrm{Var}(t)$. したがって, $\mathrm{FV}(\exists\vec{y}.\psi) \subseteq \mathrm{Var}(t)$ が示された.

以上より, $t[\exists\vec{y}.\psi]$ は存在制約付き項である. □

補題 3.20. 存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$, $t_1[\exists\vec{y_1}.\psi_1]$,

$t_2[\exists\vec{y_2}.\psi_2]$ について，$s[\exists\vec{x}.\varphi] \to_{\mathsf{rule}} t_1[\exists\vec{y_1}.\psi_1]$, $s[\exists\vec{x}.\varphi] \to_{\mathsf{rule}} t_2[\exists\vec{y_2}.\psi_2]$ が同じ規則と同じ位置に置いて書き換えられているならば，変数の名前変えのもとで $t_1[\exists\vec{y_1}.\psi_1]$ と $t_2[\exists\vec{y_2}.\psi_2]$ は同一．

(証明)．用いた書き換えを $l \to r[\pi_1 \wedge \pi_2]$ とする．このとき，書き換え規則は定義 3.16 に従う．このとき，$s = C[l\gamma]$, $\mathrm{dom}(\gamma) = \mathrm{Var}(l)$ より，γ は一意に定まる．よって，$t = C[r\gamma]$ より，t も一意に定まる．同様に ψ_1 と ψ_2 も一意に定まり，$\vec{y_1}$ と $\vec{y_2}$ も同一である． $\square$

EE 変換を用いた，従来の制約付き項の Rule 書き換えと存在制約付き項の Rule 書き換えの関係を以下に示す．

補題 3.21. 制約付き項 $s[\varphi]$, $t[\varphi]$ について，$s[\varphi] \to_{\mathsf{rule}} t[\varphi]$ のように書き換えができるとき，ある存在制約付き項 $u[\exists\vec{y}.\psi]$ が存在し，以下の 2 つが成立する．

1. 同じ規則と同じ位置において，$ext(s[\varphi]) \to_{\mathsf{rule}} u[\exists\vec{y}.\psi]$ のように書き換えられる．
2. $t[\varphi] \subsetsim u[\exists\vec{y}.\psi]$.

(証明)．$s[\varphi] \to_{\mathsf{rule}} t[\varphi]$ を仮定する．このとき，規則 $\rho : l \to r[\pi_1 \wedge \pi_2]$ を用いて，$s = C[l\gamma]$, $t = C[r\gamma]$ とできると仮定する．ただし，$\pi_1 \downharpoonright \mathrm{Var}(l)$, $\mathrm{dom}(\gamma) = \mathrm{Var}(l) \cup \mathrm{Var}(r) \cup \mathrm{Var}(\pi_1 \wedge \pi_2)$, $\forall x \in \mathcal{LV}ar(\rho).\gamma(x) \in \mathcal{V}al \cup \mathrm{Var}(\varphi)$, $\mathcal{M} \vDash \varphi \Rightarrow (\pi_1 \wedge \pi_2)\gamma$ を満たす．また，一般性を失うことなく，$\mathrm{Var}(\rho) \cap \mathrm{Var}(s) \cup (\mathrm{Var}(\varphi)) = \emptyset$.

最初に，$ext(s[\varphi]) = s[\exists\vec{x}.\varphi]$ が同じ規則を用いて書き換えられるかどうかを考える．ここで，$\gamma' = \{x \mapsto \gamma(x) \mid x \in \mathrm{Var}(l)\}$ とする．このとき，$l\gamma = l\gamma'$ より，$s = C[l\gamma] = C[l\gamma']$. ここで，$s[\exists\vec{x}.\varphi]$ が以下のように書き換えられることを示す．

$$\begin{array}{rcl} s[\exists\vec{x}.\varphi] & = & C[l\gamma'][\exists\vec{x}.\varphi] \\ & \to_{\mathsf{rule}} & C[r\gamma'][\exists\vec{y}.\psi] \\ & = & t[\exists\vec{y}.\psi] \end{array}$$

ただし，ψ, $\vec{y}$ は以下のように定義する．

$$\begin{array}{rcl} \psi & = & \varphi \wedge \bigwedge_{y \in \mathcal{EV}ar(\rho)} y = y \wedge \pi_2\gamma \\ \{\vec{y}\} & = & \mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{Var}(t) \end{array}$$

まず，$\mathcal{M} \vDash \exists\vec{x}.\varphi \Rightarrow \pi_1\gamma'$ が成立するかを考える．$\mathcal{M} \vDash \varphi \Rightarrow (\pi_1 \wedge \pi_2)\gamma$ より，$\mathcal{M} \vDash \varphi \Rightarrow \pi_1\gamma$. $\mathrm{Var}(\pi_1) \subseteq \mathrm{Var}(l)$ より，$\pi_1\gamma = \pi_1\gamma'$. よって，$\mathcal{M} \vDash \varphi \Rightarrow \pi_1\gamma'$ も成立．$l\gamma'$ は s の部分項より，$\mathrm{Var}(l\gamma') \subseteq \mathrm{Var}(s)$．したがって，$\mathrm{Var}(\pi_1) \subseteq \mathrm{Var}(l)$ より，$\mathrm{Var}(\pi_1\gamma') \subseteq \mathrm{Var}(l\gamma') \subseteq \mathrm{Var}(s)$．一方，$(\mathrm{Var}(\varphi) \setminus \mathrm{Var}(s)) \cap \mathrm{Var}(s) = \emptyset$ より，$(\mathrm{Var}(\varphi) \setminus \mathrm{Var}(s)) \cap \mathrm{Var}(\pi_1\gamma') = \emptyset$. つまり，$\{\vec{x}\} \cap \mathrm{Var}(\pi_1\gamma) = \emptyset$. したがって，以下が成立する．

$$\begin{array}{rl} & \mathcal{M} \vDash \varphi \Rightarrow \pi_1\gamma' \\ \Rightarrow & \mathcal{M} \vDash \forall\vec{x}.(\varphi \Rightarrow \pi_1\gamma') \\ \Rightarrow & \mathcal{M} \vDash \exists\vec{x}.\varphi \Rightarrow \pi_1\gamma' \end{array}$$

以上より，$s[\exists\vec{x}.\varphi] \to_{\mathsf{rule}} t[\exists\vec{y}.\psi]$ のように書き換えることができた．

次に，書き換えられた項 $u[\exists\vec{y}.\psi]$ について，$t[\varphi] \subsetsim u[\exists\vec{y}.\psi]$ が成立するかを考える．つまり，$\delta \vDash \varphi$ を満たす任意の δ について，ある代入 δ' が存在して，$\delta' \vDash \exists\vec{y}.\psi$ かつ，$t\delta = u\delta'$ が成立するかを考える．

$\delta \vDash \varphi$ とする．このとき，以下の 2 つが成立する．

$$\forall x \in \mathrm{Var}(\varphi).\delta(x) \in \mathcal{V}al$$
$$\mathcal{M} \vDash \varphi\delta$$

ここで，$\delta' = \delta \circ \gamma$ をとると，$t = u\gamma$ より，$t\delta = (u\gamma)\delta = u(\delta \circ \gamma) = u\delta'$. ここで，$\psi = \varphi \wedge \bigwedge_{y \in \mathcal{EV}ar(\rho)} y = y \wedge \pi_2\gamma'$ に注意して，ψ のそれぞれの構成要素について考える．まず，$\delta' \vDash \exists\vec{y}.\bigwedge_{y \in \mathcal{EV}ar(\rho)} y = y$ は自明．次に $\delta' \vDash \exists\vec{y}.\pi_2\gamma'$ について考える．$x \in \mathrm{Var}(\pi_2)$ とする．このとき，$x \in \mathrm{Var}(l)$ なら $\mathrm{Var}(\pi_2\gamma) \subseteq \mathrm{Var}(s)$, $\mathrm{dom}(\gamma) \cap \mathrm{Var}(s) = \emptyset$ より，$\gamma(\gamma'(x)) = \gamma'(x) = \gamma(x)$. また，$x \notin \mathrm{Var}(l)$ ならば，$x\gamma' = x$ より，$\gamma(\gamma'(x)) = \gamma(x)$．したがって，$\pi_2\gamma'\delta'$ は以下のように変形できる．

$$\begin{array}{rcl} \pi_2\gamma'\delta' & = & ((\pi_2\gamma')\gamma)\delta \\ & = & (\pi_2\gamma)\delta \end{array}$$

ここで，$\vDash \varphi \Rightarrow (\pi_1 \wedge \pi_2)\gamma$ かつ $\delta \vDash \varphi$ より，$\delta \vDash \pi_2\gamma$. したがって，$\vDash (\pi_2\gamma)\delta$. したがって，$\vDash (\pi_2\gamma')\delta'$. よって，$\delta' \vDash \vec{y}.\pi_2\gamma'$.

最後に，$\mathrm{Var}(\rho) \cap \mathrm{Var}(\varphi) = \emptyset$, $\mathrm{dom}(\gamma) = \mathrm{Var}(\rho)$ より，$\varphi\gamma = \varphi$. よって，$\varphi\delta'$ は以下のように変形で

きる．

$$\begin{array}{rcl}\varphi\delta' & = & (\varphi\gamma)\delta \\ & = & \varphi\delta\end{array}$$

$\mathcal{M} \vDash \varphi\delta$ より，$\mathcal{M} \vDash \varphi\delta'$．以上より，$\delta' \vDash \varphi \wedge \bigwedge_{y\in\mathcal{EV}ar(\rho)} y = y \wedge \pi_2\gamma'$．したがって，$\delta' \vDash \exists\vec{y}.\psi$．

以上より，$t\delta = u\delta'$ かつ $\delta' \vDash \exists\vec{y}.\psi$ が言えたので，$t[\varphi] \precsim u[\exists\vec{y}.\psi]$ が言えた．

□

例 3.22.

$$f(x') \to g(y', z')[x' \geq 0 \wedge z' > 3]$$

という規則を用いて，$f(x)[x > 0]$ という制約付き項の書き換えは以下のようにできる. ただし，これは書き換えられるうちの一例である．

$$f(x)[x > 0] \to_{\mathsf{rule}} g(x, 4)[x > 0]$$

このとき，$\mathit{ext}(f(x)[x > 0]) = f(x)[x > 0]$ の書き換えも考えると，以下のように書き換えられる．

$$\begin{array}{rl} & f(x)[x > 0] \\ \to_{\mathsf{rule}} & g(y', z')[\exists x.x > 0 \wedge y' = y' \wedge z' > 3]\end{array}$$

このとき，書き換えられた項は以下のような関係にある．

$$g(x, 4)[x > 0] \precsim g(y', z')[\exists x.x > 0 \wedge y' = y' \wedge z' > 3]$$

ER 変換を用いて，存在制約付き項の Rule 書き換えと従来の制約付き項の Rule 書き換えの関係性を補題 3.21 と同じような形の補題で示したい．しかし，存在制約付き項は書き換えられる一方で，従来の制約付き項は書き換えられない例が存在する．以下にその例を示す．

例 3.23.

$$f(x') \to g(y')[y' \times y' = x']$$

という規則を用いて，存在制約付き項 $f(x)[x \geq 0]$ という存在制約付き項の書き換えは以下のようにできる．

$$f(x)[x \geq 0] \to_{\mathsf{rule}} g(y')[\exists x.y' \times y' = x \wedge x \geq 0]$$

一方，制約付き項 $f(x)[x \geq 0]$ を以下のように書き換えたい．

$$f(x)[x \geq 0] \to_{\mathsf{rule}} g(t)[x \geq 0]$$

このとき，$\mathcal{M} \vDash x \geq 0 \Rightarrow t \times t = x$ を満たす．しかし，x が平方数でない限り，そのような t は存在しない．したがって，どのような t を考えても，$\mathcal{M} \nvDash x \geq 0 \Rightarrow t \times t = x$．したがって，制約付き項 $f(x)[x \geq 0]$ は正規形である．

補題 3.24. 存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$, $t[\exists\vec{y}.\psi]$ について，$s[\exists\vec{x}.\varphi] \to_{\mathsf{rule}} t[\exists\vec{y}.\psi]$ のように書き換えができるとき，同じ規則と同じ位置において，$\mathit{rmv}(s[\exists\vec{x}.\varphi]) \to_{\mathsf{rule}} u[\varphi]$ のように書き換えられるならば，$u[\varphi] \precsim t[\exists\vec{y}.\psi]$.

(証明)．$s[\exists\vec{x}.\varphi] \to_{\mathsf{rule}} t[\exists\vec{y}.\psi]$ を仮定する．補題 3.21 より，ある $t_1[\exists\vec{y_1}.\varphi_1]$ を用いて以下が言える．

$$\mathit{ext}(\mathit{rmv}(s[\exists\vec{x}.\varphi])) \to_{\mathsf{rule}} t_1[\exists\vec{y_1}.\varphi_1]$$
$$u[\varphi] \precsim t_1[\exists\vec{y_1}.\varphi_1]$$

補題 3.8 より，$s[\exists\vec{x}.\varphi] = \mathit{ext}(\mathit{rmv}(s[\exists\vec{x}.\varphi]))$．また，補題 3.20 より，$t_1[\exists\vec{y_1}.\psi_1] = t[\exists\vec{y}.\psi]$．□

定義 3.25 (存在制約付き項における Calc 書き換え)．存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$ の Calc 書き換えを考える. 関数記号 $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{theory}} \setminus \mathcal{V}al$ と，$s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{V}al \cup \mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi)$ について，$s|_p = f(s_1, \ldots, s_n)$ と書けるとき，$s[\exists\vec{x}.\varphi]$ は以下のように書き換えできる．

$$\begin{array}{rl} & s[\exists\vec{x}.\varphi] \\ = & s[f(s_1, \ldots, s_n)]_p[\exists\vec{x}.\varphi] \\ \to_{\mathsf{calc}} & s[x]_p[\exists\vec{y}.\psi]\end{array}$$

ただし，$\{\vec{y}\} = \mathrm{Var}(\psi) \setminus (\mathrm{Var}(s[x]_p))$，$\psi = \varphi \wedge x = f(s_1, \ldots, s_n)$.

例 3.26. このとき，$f(4+z, x)[\exists y.x > y \wedge z = 3]$ という存在制約付き項を考える．このとき, 以下のように Calc 書き換えできる．

$$\begin{array}{rl} & f(4+z, x)[\exists y.x > y \wedge z = 3] \\ \to_{\mathsf{calc}} & f(w, x)[\exists y, z.x > y \wedge z = 3 \wedge w = 4 + z]\end{array}$$

補題 3.27. 存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$ について，$s[\exists\vec{x}.\varphi] \to_{\mathsf{calc}} t[\exists\vec{y}.\psi]$ と書き換えられるならば，$t[\exists\vec{y}.\psi]$ は存在制約付き項である．

(証明). ある位置 p, 関数記号 $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{theory}} \setminus \mathcal{V}al$，$s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{V}al \cup \mathrm{FV}(\exists\vec{x}.\varphi)$ について，$s|_p = f(s_1, \ldots, s_n)$ と仮定する. このとき，$s[\exists\vec{x}.\varphi]$ は以下のように書き換えができる．

$$\begin{array}{rl} & s[\exists\vec{x}.\varphi] \\ = & s[f(s_1, \ldots, s_n)]_p[\exists\vec{x}.\varphi] \\ \to_{\mathsf{calc}} & s[x]_p[\exists\vec{y}.\psi]\end{array}$$

ただし，$\{\vec{y}\} = \mathrm{Var}(\psi) \setminus (\mathrm{Var}(s[x]_p))$，$\psi = (\varphi \wedge (x = f(s_1, \ldots, s_n)))$．$t = s[x]_p$ としたとき，$t[\exists \vec{y}.\psi]$ が存在制約付き項となることを示す．

$\mathrm{BV}(\exists \vec{y}.\psi) = \{\vec{y}\}$ で，$\{\vec{y}\} = \mathrm{Var}(\psi) \setminus (\mathrm{Var}(s[x]_p))$ より，$\mathrm{BV}(\exists \vec{y}.\psi) = \mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{Var}(t)$．したがって，$\mathrm{BV}(\exists \vec{y}.\psi) \cap \mathrm{Var}(t) = \emptyset$．次に $\mathrm{FV}(\exists \vec{y}.\psi) \subseteq \mathrm{Var}(t)$ を示す.$\mathrm{FV}(\exists \vec{y}.\psi) = \mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{BV}(\exists \vec{y}.\psi)$ より，$\mathrm{FV}(\exists \vec{y}.\psi) = \mathrm{Var}(\psi) \setminus (\mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{Var}(t))$．ここで，$\mathrm{Var}(\psi) \setminus (\mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{Var}(t)) = \mathrm{Var}(\psi) \cap \mathrm{Var}(t)$ より，$\mathrm{FV}(\exists \vec{y}.\psi) = \mathrm{Var}(\psi) \cap \mathrm{Var}(t)$.$\mathrm{BV}(\exists \vec{y}.\psi) \cap \mathrm{Var}(t) = \emptyset$ より，$\mathrm{FV}(\exists \vec{y}.\psi) = \mathrm{FV}(\exists \vec{y}.\psi) \cap \mathrm{Var}(t)$．したがって，$\mathrm{FV}(\exists \vec{y}.\psi) \subseteq \mathrm{Var}(t)$．したがって，$\mathrm{FV}(\exists \vec{y}.\psi) \subseteq \mathrm{Var}(t)$ が示された．

したがって，$t[\exists \vec{y}.\psi]$ は存在制約付き項である．□

補題 3.28. 存在制約付き項 $s[\exists \vec{x}.\varphi]$，$t_1[\exists \vec{y_1}.\psi_1]$，$t_2[\exists \vec{y_2}.\psi_2]$ について，$s[\exists \vec{x}.\varphi] \rightarrow_{\mathsf{calc}} t_1[\exists \vec{y_1}.\psi_1]$，$s[\exists \vec{x}.\varphi] \rightarrow_{\mathsf{calc}} t_2[\exists \vec{y_2}.\psi_2]$ が同じ位置で書き換えられているならば，変数の名前変えのもとで，$t_1[\exists \vec{y_1}.\psi_1]$ と $t_2[\exists \vec{y_2}.\psi_2]$ は同一.

(証明)．$f \in \mathcal{F}_{\mathrm{theory}} \setminus \mathcal{V}al$ と $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{V}al \cup \mathrm{Var}(\varphi)$ を用いて，$s = s[f(s_1, \ldots, s_n)]_p$ と書けることを仮定する．このとき，$t = s[x]_p$ で x は存在制約付き項に存在しない新しい変数．x として，どんな変数を取ったとしても，$\vec{y}$ は一意に定まる．また，t_1，t_2 と ψ_1，ψ_2 も変数の名前変えのもとで一意に定まる．□

存在制約付き項の Calc 書き換えについて，以下の補題が言える. これは制約付き項での Calc 書き換えと存在制約付き項での Calc 書き換えが相互に変換可能であることを示している.

補題 3.29. (1) 制約付き項 $s[\varphi]$，$t[\psi]$ について，$s[\varphi] \rightarrow_{\mathsf{calc}} t[\psi]$ と書き換えられるとき，$ext(s[\varphi]) \rightarrow_{\mathsf{calc}} ext(t[\psi])$ のように書き換えができる．

(2) 存在制約付き項 $s[\exists \vec{x}.\varphi]$，$t[\exists \vec{y}.\psi]$ について，$s[\exists \vec{x}.\varphi] \rightarrow_{\mathsf{calc}} t[\exists \vec{y}.\psi]$ と書き換えられるとき，$rmv(s[\exists \vec{x}.\varphi]) \rightarrow_{\mathsf{calc}} rmv(t[\exists \vec{y}.\psi])$ のように書き換えができる．

(証明)．(1) $s[\varphi] \rightarrow_{\mathsf{calc}} t[\psi]$ を仮定すると，$f \in \mathcal{F}_{\mathrm{theory}} \setminus \mathcal{V}al$，$s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{V}al \cup \mathrm{Var}(\varphi)$，変数 x を用いて, 以下のように書ける．

$$
\begin{array}{rcl}
s|_p & = & f(s_1, \ldots, s_n) \\
t & = & s[x]_p \\
\psi & = & \varphi \wedge (x = f(s_1, \ldots, s_n))
\end{array}
$$

ここで，$ext(t[\psi]) = t[\exists \vec{w}.\psi]$，$ext(s[\varphi]) = s[\exists \vec{x}.\varphi]$ とする．補題 3.5 を用いて，$\mathrm{FV}(\exists \vec{x}.\varphi) = \mathrm{Var}(\varphi) \cap \mathrm{Var}(s)$．また，$f(s_1, \ldots, s_n) \trianglelefteq s$ より，$s_i \in \mathrm{Var}(\varphi)$ のとき，$s \in \mathrm{FV}(\exists \vec{x}.\varphi)$．よって，定義より以下のように書き換えることができる．

$$
\begin{array}{rcl}
s[\exists \vec{x}.\varphi] & = & s[f(s_1, \ldots, s_n)]_p[\exists \vec{x}.\varphi] \\
 & \rightarrow_{\mathsf{calc}} & s[x]_p[\exists \vec{z}.\varphi \wedge x = f(s_1, \ldots, s_n)] \\
 & = & t[\exists \vec{z}.\psi]
\end{array}
$$

ただし，$\{\vec{z}\} = \mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{Var}(s[x]_p)$．また，このとき $\{\vec{w}\} = \mathrm{BV}(\exists \vec{w}.\psi) = \mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{Var}(t) = \{\vec{z}\}$．したがって，$ext(t[\psi]) = t[\exists \vec{z}.\psi]$ が示されたので，$ext(s[\varphi]) \rightarrow_{\mathsf{calc}} ext(t[\psi])$ と書き換えられることが示せた．

(2) $s[\exists \vec{x}.\varphi] \rightarrow_{\mathsf{calc}} t[\exists \vec{y}.\psi]$ を仮定すると，$f \in \mathcal{F}_{\mathrm{theory}} \setminus \mathcal{V}al$，$s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{V}al \cup \mathrm{FV}(\exists \vec{x}.\varphi)$，変数 x を用いて以下のように書ける．

$$
\begin{array}{rcl}
s|_p & = & f(s_1, \ldots, s_n) \\
t & = & s[x]_p \\
\exists \vec{y}.\psi & = & \exists \vec{y}.\varphi \wedge (x = f(s_1, \ldots, s_n))
\end{array}
$$

ただし，$\{\vec{y}\} = \mathrm{Var}(\psi) \setminus \mathrm{Var}(s[x]_p)$．ここで，$rmv(s[\exists \vec{x}.\varphi]) = s[\varphi]$ についても $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{V}al \cup \mathrm{Var}(\varphi)$ より，同じように書き換えることができる. つまり

$$
\begin{array}{rcl}
s[\varphi] & = & s[f(s_1, \ldots, s_n)][\varphi] \\
 & \rightarrow_{\mathsf{calc}} & C[x][\varphi \wedge x = f(s_1, \ldots, s_n)]
\end{array}
$$

このとき，$rmv(t[\exists \vec{y}.\psi]) = t[\psi]$，$t = C[x]$，$\psi = \varphi \wedge x = f(s_1, \ldots, s_n)$ より，$s[\varphi] \rightarrow_{\mathsf{calc}} t[\psi]$. したがって，$rmv(s[\exists \vec{x}.\varphi]) \rightarrow_{\mathsf{calc}} rmv(t[\exists \vec{y}.\psi])$ を示せた．□

4 存在制約付き項における書き換えと性質

この節では，存在制約付き項における書き換えを定義し，その書き換えと制約付き項の書き換えの関係を示す．また，存在制約付き項の書き換えによって同じ規則，同じ位置で書き換えられた項のバリエーション

についても考える．

定義 4.1 (存在制約付き項の書き換え)．存在制約付き項上の書き換えについて $\to_{\mathcal{R}} = \to_{\mathsf{rule}} \cup \to_{\mathsf{calc}}$，$\tilde{\to}_{\mathcal{R}} = \sim \circ \to_{\mathcal{R}} \circ \sim$ のように定義する．

定理 4.2. 制約付き項 $s[\varphi]$，$t[\varphi]$ について，ある位置 p で $s[\varphi] \to_{\mathcal{R}} t[\psi]$ のように書き換えができるとき，ある u，ψ，$\vec{y}$ について，以下の 2 つが成立する．

1. 同じ規則を用いて，同じ位置を $ext(s[\varphi]) \to_{\mathcal{R}} u[\exists\vec{y}.\psi]$ のように書き換えることができる．
2. $ext(t[\varphi]) \underset{\sim}{\subset} u[\exists\vec{x}.\psi]$.

(証明)．補題 3.21，補題 3.29 より成立する． □

定理 4.3. 存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$，$t[\exists\vec{y}.\psi]$ について，ある位置 p で $s[\exists\vec{x}.\varphi] \to_{\mathcal{R}} t[\exists\vec{y}.\psi]$ のように書き換えができるとき，同じ規則を用いて同じ位置を $rmv(s[\exists\vec{x}.\varphi]) \to_{\mathcal{R}} u[\varphi]$ のように書き換えられるならば，$u[\varphi] \underset{\sim}{\subset} rmv(t[\exists\vec{y}.\psi])$.

(証明)．補題 3.24，補題 3.29 より成立する． □

また，存在制約付き項の書き換えについて，以下の定理が成立する．

定理 4.4. 存在制約付き項 $s[\exists\vec{x}.\varphi]$ について，同じ位置，同じ規則で項を書き換えるとき，書き換えられる結果は変数の名前変えのもとで一意に定まる．

(証明)．補題 3.20，補題 3.28 より成立する． □

5 おわりに

本稿では存在制約付き項の枠組みを提案し，その書き換えも提示した．特に，等価関係から自然に導かれる擬順序関係を用いて，存在制約付き項上の書き換えと従来の制約付き項上の書き換えの間の関係性を示した．我々のアプローチでは，書き換えを行う際に制約を最も広く取り，もっとも一般的な制約のみで書き換えを行う．このため，制約を弱めることに伴う非決定性を排除することができるため，書き換えがよりよい性質を持つことが期待できる．また，擬順序関係に基づいてもとの書き換えを構成することができる．今後の課題としては，存在制約付き項における等価関係と書き換え関係の可換性について明らかにすることである．存在制約付き項に対して，書き換えを行ってから等価変換を行ったものと，等価変換を行ってから書き換え関係をおこなったものが存在制約付き項上の等価関係のもとで同一になるかは定かではない．また，存在制約付き項の等価関係と書き換え関係の可換性を示すことで，従来の制約付き項ではどのようなことが言えるのかも不明である．この点を解明することが今後の研究の方向である．

謝辞 本研究は一部日本学術振興会科学研究費 24K14817 の補助を受けて行われた．

参 考 文 献

[1] Fuhs, C., Kop, C., and Nishida, N.: Verifying Procedural Programs via Constrained Rewriting Induction, *ACM Trans. Comput. Logic*, Vol. 18, No. 2(2017).

[2] Kop, C. and Nishida, N.: Term Rewriting with Logical Constraints, In *Proc. of 9th FroCoS*, LNAI, Vol. 8152, Springer, 2013, pp. 343–358.

[3] Schöpf, J. and Middeldorp, A.: Confluence Criteria for Logically Constrained Rewrite Systems, In *Proc. of 29th CADE*, LNCS, Vol. 14132, Springer, 2023, pp. 474–490.

[4] Schöpf, J., Mitterwallner, F., and Middeldorp, A.: Confluence of Logically Constrained Rewrite Systems Revisited, In *Proc. of 12th IJCAR*, LNCS, Vol. 14740, Springer, 2024, pp. 298–316.

[5] Winkler, S. and Middeldorp, A.: Completion for Logically Constrained Rewriting, In *Proc. of 3rd FSCD*, LIPIcs, Vol. 108, 2018, pp. 30:1–30:18.