日本ソフトウェア科学会第 40 回大会 (2023 年度) 講演論文集

時間的性質類の言語的及び位相的特性

冨田 尭

安全性類と活性類は，形式検証で用いられる最も基本的な時間的性質類であり，言語的，位相的，時間論理的及びオートマトン的観点から広く研究されている．この 2 つの時間性質類は標準 Cantor 空間の閉集合系と稠密集合系にそれぞれ対応し，与えられた任意の時間的性質に対して，それを含む最小の安全性（安全性成分）を構成することで，安全性と活性の積に分解できることが知られられている．この安全性成分は元の時間的性質の上方近似に相当し，近似的検証などに利用可能である．

本稿では，様々な時間的性質類の関係を補・逆・対偶の観点から整理し，安全性成分とは異なる 4 種の時間的性質成分を構成でき，また，安全性-活性積分解とは異なる 4 種の積分解が可能であることを示す．さらに，4 つの時間的性質類それぞれを閉集合系とする非標準的な位相空間が生成できることも示す．前述の積分解可能性は，この 4 つの非標準的な位相空間の特性からも説明できる．

1 はじめに

1.1 背景

形式検証で用いられる最も基本的な概念である安全性及び活性 [7] [1] [2] [6] は,「悪いことが起こらない」/「良いことがいつか起こる」という分かりやすい要求意図を反映したものであり，理論的にも最も素朴な時間的性質類である．時間的性質上の自然な位相空間である標準 Cantor 空間の閉集合族と稠密集合系とそれぞれ一致し，安全性成分は閉包に相当する [1] [2]．その安全性成分を用いることで，任意の時間的性質を安全性と活性の積に分解 [1] [2] [6] でき，計算理論的にも扱い易い．

安全性類及び活性類を基礎として要求意図や検証容易性，数学的の観点等からさまざまな時間的性質類 [1] [9] [14] [16] [3] [10] [6] が提案されているが，一部が標準 Cantor 空間の Borel 階層 [8] [17] [9] やある種の集合族 [16] [3] と対応すること以外，各時間的性質類に関する特性はあまり知られていない．形式検証の効率化等のためには，さまざまな時間的性質類に対してより広くより深い知見を与えることが重要である．

1.2 目的

本研究の目的は，時間的性質類の関係を整理し，それぞれの言語的及び位相的特性を明らかにすることである．

特に，標準 Cantor 空間の Borel 階層に対応しない時間的性質類のうち，形式検証でも重要な公平性類及びその基礎となる絶対活性類と安定性類に関して，積分解可能性及びそれと対応する位相空間を明らかにする．

1.3 貢献

本研究の貢献は，以下の 3 点である．

1. 時間的性質類間の補・逆・対偶関係を提案し，時間的性質類間の関連を明確化して階層定理を示した．

Linguistic and Topological Characteristics of Temporal Property Classes.

TOMITA, Takashi, 北陸先端科学技術大学院大学 情報社会基盤研究センター, Research Center for Advanced Computing Infrastructure, Japan Advanced Institute of Science and Technology.

2. 安全性成分とは異なる 4 種の時間的性質類（安定性，対偶安全性，広義公平性，双安全性）の成分を構成できることを示し，安全性-活性積分解とは異なる 4 種の積分解が可能であることを言語的観点から証明した．
3. 成分構成可能な 4 種の時間的性質類それぞれを閉集合系として得られる非標準的な位相空間の特性を明らかにし，前述の分解可能性が位相的観点からも説明できることを示した．

安全性及び活性を含め多くの既知の時間的性質類は，(強い/弱い）良性/悪性の接頭辞/接尾辞の存在に基づいて定義されている．良性/悪性を入れ替えた補関係，接頭辞/接尾辞の限量を入れ替えた逆関係，補関係と逆関係を合わせた対偶関係を導入すると，多くの既知の時間的特性類の関係を説明できる．

また，言語的観点から，安全性-活性積分解を参考に時間的性質類間にある補関係・逆関係・対偶関係を考慮すると，いくつかの時間的性質類の成分構成可能性や積分解可能性が予想される．実際，安定性-逆活性及び双安全性-双活性の 2 対については，予想通り成分構成及び積分解が可能である．一方で，成分構成可能な対偶安全性及び広義公平性については，活性類の補類・逆類・対偶類などとは対を成さない．ただし，条件付きで広義公平性-活性分解が可能である．安全性成分をさらに緩和した双安全性成分や，検証対象のシステムの振る舞いの前提条件としてしばしば用いられる公平性の成分を構成する上方近似だけでなく，補対称性を利用した下方近似も可能であり，形式検証の効率化等に利用できる可能性がある．

そして，安全性類を閉集合系とする標準 Cantor 空間を参考にすると，成分構成できた時間的性質類が閉集合系をなすことが確認できる．また，それらを基に標準 Cantor 空間と「逆」や「対偶」などの位相空間が生成でき，前述の積分解可能性の妥当性も含めて位相的観点から説明できる．

1.4 関連研究

形式検証において中心的な役割を果たす ω-正規言語を位相的に特徴付ける研究 [8] [17] は古くから行われており，ω-正規言語類が標準 Cantor 空間の Borel 階層の $\mathbf{\Delta}_3^0$ 集合（閉集合の可算和と開集合の可算積の有限和積の集合）の部分であることが知られている．本稿では，ω-正規言語類に限らない時間的性質類について取り扱う．

Alpern ら [1] [2] は，安全性類及び活性類の形式的な定義を与え，安全性類と活性類が標準 Cantor 空間の閉集合系と稠密集合系と一致することを示した．そして，任意の時間的性質が安全性と活性の積に分解できること，及び，各成分に対応するオートマトンを構成できることを示した．また，活性類の亜種として一様活性，絶対活性の概念も併せて定義している．本稿では，安全性と活性の対以外での積分解可能性を示し，また，標準 Cantor 空間ではない位相空間と対応させることで，位相的観点からもその積分解可能性の裏付けを与えた．

Manna ら [9] は，標準 Cantor 空間の Borel 階層に基づく時間的性質類として，安全性類（閉集合系 $\mathbf{\Pi}_1^0$），保証性類（開集合系 $\mathbf{\Sigma}_1^0$），義務性類（$\mathbf{\Delta}_2^0$），再発性類（$\mathbf{\Pi}_2^0$），持続性類（$\mathbf{\Sigma}_2^0$）及び反応性類（$\mathbf{\Delta}_3^0$）を中心にその言語的，位相的，時間論理的及びオートマトン的観点からその特徴を論じている．本稿では，安全性類及び活性類とその補・逆・対偶関係にある時間的性質類を中心にその言語的及び位相的観点からその特徴を論じており，分解可能性や標準的でない位相空間について分析を行っている．

Sistla [14] は，安全性類，絶対活性類，安定性類，公平性類などの時間的性質類の時間論理構文の特徴について論じている．本稿における補・逆・対偶関係や合成類は，絶対活性，安定性及び公平性の間の関係に着想を得て一般化したものである．

Völzer ら [16] は，リアクティブシステムの振る舞いの制約としての様々な公平性について，構成的活性の概念を通して定義している．構成的活性はゲーム理論，言語及び標準的な位相の各観点から特徴付けされており，様々な活性類の亜種も導入している．本稿では，システムの振る舞いの制約としての性質には注目していないため，Sistla [14] の公平性を採用している．

Diekert ら [3] は，実行時検証における検査性質の監視可能性について標準 Cantor 空間に基づく位相的な特徴付けを行い，それを用いたモデル検査について

議論している．本稿では，監視可能性は取り扱わず，安全性類及び活性類と補・逆・対偶関係にある時間的性質類と標準的でない位相空間に注目している．

Peled ら [10] は，実行時検証における検査性質の監視可能性を修正し，与えられた検査性質が監視可能か判定するアルゴリズムを与えている．その際，新たに罹患性類及び疑問性類という時間的性質類を導入し，監視不能な検査性質を詳細に分析できるようにしている．本稿では，補・逆・対偶関係や合成類を扱うことで，Peled らが扱っていた時間的性質類より多くの時間的性質類の間の関係を明らかにし，より詳細な階層定理を示した．

Tomita ら [15] は，時間的性質として表現されたリアクティブシステム仕様の実現可能性 [11] 必要条件の入力/出力及び接頭辞/接尾辞に対する限量に基づく特徴付けを行い，必要条件群の階層定理を証明している．本稿では，リアクティブシステム仕様のみを対象とはしておらず，入力/出力の区別のないアルファベットによる時間的性質全般を対象としている．ただし，接頭辞/接尾辞に対する限量に基づく時間的性質に注目している点では共通しており，実現可能性必要条件群の内の安定的充足可能性/保存的充足可能性は，安定性成分（定義 20）/安全性成分（定義 6）の実現可能性に相当する．

Henzinger ら [6] は，定量化安全性及び定量化活性の概念を導入し，安全性-活性積分解可能性や Borel 階層に対応する時間的性質類階層 [9] が保守的に一般化されることを証明した．また，定量化時間的性質に対応する近似的監視器を構成できることを示している．本稿では，補・逆・対偶関係に基づく定性的な時間的性質のみを取り扱っている．

1.5 本稿の構成

2 章では，準備として，時間的性質及び位相の基本的な定義と定理について紹介する．3 章では，時間的性質類の補・逆・対偶の定義を与え，既存のものも含め時間的性質類間の関係について示す．4 章及び 5 章では，時間的性質類群の言語的及び位相的な特性についてそれぞれ論じる．6 章では考察を行い，最後に 7 章でまとめる．

2 準備

本章では，基本的な概念の定義を与える．

2.1 時間的性質

本節では，時間的性質の基本的な概念と，形式検証でしばしば用いられる時間的性質類の定義を与える．

まず，**無限長語**及び**有限長語**は次のように定義される．

定義 1 (語) Σ をアルファベットとする．要素 $\sigma = a_0a_1\ldots \in \Sigma^\omega$ を**無限長語**，要素 $s = b_0b_1\ldots b_n \in \Sigma^*$ を**有限長語**という．

なお，単純化のため，以降では単に「語」と表記した場合は無限長語を指すものとする．また，長さ 0 の有限長語（空列）を ε と表記する．

時間的性質は語の集合，即ち**言語**と同一視される．

定義 2 (言語/時間的性質) Σ（ただし $|\Sigma| > 1$）をアルファベットとする．部分集合（語の集合）$P \subseteq \Sigma^\omega$ を**言語**又は**時間的性質**という．

なお，議論を簡潔にするため，以降ではアルファベット Σ を固定し，$a, b \in \Sigma$ を仮定する．

時間的性質に対しては，その要素（語）の接頭部分及び接尾部分に基づいた分類がしばしば行われる．

定義 3 (接頭辞/接尾辞) 語 $\sigma \subseteq \Sigma^\omega$ が有限長語 $s \in \Sigma^*$ と語 $\sigma' \subseteq \Sigma^\omega$ の連結 $s\sigma'$ と等しいとき，s を**接頭辞**，σ を**接尾辞**という．

語 $\sigma = a_0a_1\ldots\Sigma^\omega$ に対して，その接頭辞の集合 $\{\varepsilon, a_0, a_0a_1, a_0a_1a_2, \ldots\}$ を $\mathit{pref}(\sigma)$，接尾辞の集合 $\{a_ia_{i+1}\ldots, a_{i+1}a_{i+2}\ldots, a_{i+2}a_{i+3}\ldots, \ldots\}$ を $\mathit{suff}_i(\sigma)$ と表記する．また，有限語 $s = a_0\ldots a_n \in \Sigma^*$ に対して，その接頭辞の集合 $\{\varepsilon, a_0, a_0a_1, \ldots, s\}$ を $\mathit{pref}(s)$，接尾辞の集合 $\{a_n, a_{n-1}a_n, \ldots, a_i\ldots a_n\}$ を $\mathit{suff}_i(s)$ と無限語の場合と同様に表記する．そして，有限及び無限時間的性質 $P \in \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$ に対して，その要素の接頭辞の集合の和 $\bigcup_{\sigma\in P} \mathit{pref}(\sigma)$ を $\mathit{Pref}(P)$，要素の接尾辞の集合の和 $\bigcup_{\sigma\in P} \mathit{suff}_i(\sigma)$ を $\mathit{Suff}_i(P)$ と表記する．なお，suff_0 及び Suff_0 を単に suff 及び

Suff と略記する．

2.1.1　安全性と活性

安全性と**活性**は Lamport によって導入された時間的性質の概念である．非形式的には，安全性とは「悪いことが決して起こらない」ことを表す性質であり，活性とは「いつか良いことが起きる」ことを表す性質である．形式的には，それぞれ以下のように定義される．

定義 4 (安全性 [1]) 以下を満たす時間的性質 $P \subseteq \Sigma^\omega$ を**安全性**という．

1. $\forall \sigma \in \Sigma^\omega.(\sigma \notin P \Rightarrow \exists s \in \mathit{pref}(\sigma).\forall \sigma' \in \Sigma^\omega.s\sigma' \notin P).$ (1)

定義 5 (活性 [1]) 以下を満たす時間的性質 $P \subseteq \Sigma^\omega$ を**活性**という．

1. $\forall s \in \Sigma^*.\exists \sigma' \in \Sigma^\omega.s\sigma' \in P.$ (2)

安全性 P を満たさない語 σ は必ず強い**悪性接頭辞** s をもち，s にどのような接尾辞 σ' が続いたとしても P を満たさない．接頭辞をシステムの現在までの実行履歴と解釈すると,「悪いことが決して起こらない」ことは「強い悪性接頭辞が出現しない」ことに対応する．

一方，活性 P には，任意の接頭辞 s に対して，P を満たすようにする弱い（つまり適応的な）**良性接尾辞**が存在する．接頭辞をシステムの現在までの実行履歴と解釈すると，システムの現在までの実行履歴がどのようなものであっても充足可能性が保持されており,「いつか良いことが起きる」ことは「それに続く実行を上手く選ぶ」ことに対応する．

ここで安全性類を `Safety` または $\mathcal{S}$ と表記する．また，$\mathcal{S} \setminus \{\Sigma^\omega\}$ を真安全性類と呼び，$\mathcal{S}_P$ と表記する．そして，活性類を `Liveness` または $\mathcal{L}$ と表記する．さらに，単項演算 $\cdot^{\mathcal{X}}$ と $\cdot^{\mathcal{Y}}$ の合成 $(\cdot^{\mathcal{X}})^{\mathcal{Y}}$ は，単に $\cdot^{\mathcal{XY}}$ と略記する．なお，$\cdot^{\mathcal{Y}}$ が補集合演算 $\cdot^{-1}$ の場合は $\cdot^{-\mathcal{X}}$ と略記する．

そして，任意の時間的性質 P はある安全性と活性の積で表現できることが知られている．

定義 6 (安全性成分) 時間的性質 P を含む最小の安全性 $\overline{\mathit{Safety}}(P)$ を，P の**安全性成分**という．

命題 1

$$\overline{\mathit{Safety}}(P) = \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \mathit{pref}(\sigma) \subseteq \mathit{Pref}(P)\}. \quad (3)$$

定理 1 (安全性-活性分解 [1] [2]) $\cdot^{-1}$ を補集合演算とする．任意の時間的性質 P に対して，

$$P' = P \cup (\overline{\mathit{Safety}}(P))^{-1} \quad (4)$$

は活性である．

ここで，$P \subseteq X$ ならば

$$P = X \cap (P \cup X^{-1}) \quad (5)$$

であるため，$X = \overline{\mathit{Safety}}(P)$ とおくと，P は安全性と活性の積に分解できることがわかる．

2.1.2　その他の時間的性質

安全性・活性と関連する時間的性質として，**絶対活性**，**一様活性**，**保証性**（又は**補安全性**），**安定性**，**公平性**，**罹患性**，**疑問性**などの時間的性質が導入されている．形式的には，それぞれ以下のように定義される．

定義 7 (絶対活性 [1]) 以下を満たす時間的性質 $P \subseteq \Sigma^\omega$ を（狭義の）**絶対活性**という．

1. $P \neq \emptyset,$ (6)
2. $\forall \sigma \in \Sigma^\omega.(\sigma \in P \Rightarrow \exists \sigma' \in \mathit{suff}(\sigma).\forall s \in \Sigma^*.s\sigma' \in P).$ (7)

命題 2 ([14]) 定義 7 の条件 2 は以下と同値である．

2'. $\forall \sigma \in \Sigma^\omega.(\sigma \in P \Rightarrow \Sigma^*\sigma \subseteq P).$ (8)

定義 8 (一様活性 [1]) 以下を満たす時間的性質 $P \subseteq \Sigma^\omega$ を**一様活性**という．

1. $\exists \sigma' \in \Sigma^\omega.\forall s \in \Sigma^*.s\sigma' \in P.$ (9)

定義 9 (保証性 [9]) 以下を満たす時間的性質 $P \subseteq \Sigma^\omega$ を**保証性**という．

1. P^{-1} は安全性.

定義 10 (安定性 [14]) 以下を満たす時間的性質 $P \subseteq \Sigma^\omega$ を**安定性**という．

1. $\forall \sigma \in \Sigma^\omega.(\sigma \in P \Rightarrow \mathit{suff}(\sigma) \subseteq P).$ (10)

定義 11 (公平性 [14]) 以下を満たす時間的性質 $P \subseteq$

Σ^ω を（狭義の）**公平性**という．

1. P は絶対活性,
2. P は安定性.

定義 12 (罹患性 [10]) 以下を満たす時間的性質 $P \subseteq \Sigma^\omega$ を**罹患性**という．

1. P^{-1} は活性.

定義 13 (疑問性 [10]) 以下を満たす時間的性質 $P \subseteq \Sigma^\omega$ を**疑問性**という．

1. P は活性ではない,
2. P は罹患性ではない.

絶対活性は，充足可能でありかつ満たす語は必ず強い良性接尾辞を持つ．即ち，接頭辞の追加に関して閉じている [14]．一様活性には，(満たす語の全てがそうとは限らないが）強い良性接尾辞が存在する．保証性は，満たさない語の集合が安全性となることから，満たす語は必ず強い良性接頭辞を持つ．安定性は，満たす語の任意の接尾辞も満たす語となる．即ち，接頭辞の除去に関して閉じている [14]．狭義公平性は，絶対活性かつ安定性であり，接頭辞の編集に関して閉じている [14]．罹患性は，満たさない語の集合が活性となることから，任意の接頭辞に対して弱い悪性接尾辞が存在する．疑問性は，活性でも罹患性でもなく，強い良性接尾辞も強い悪性接尾辞も存在する．

定義 7–13 で与えられる各時間的性質類を，それぞれ `Abs-Liveness`，`Unif-Liveness`，`Guarantee`，`Stability`，`Fairness`，`Morbidity`，`Quaestio` と表記する．

2.2 位相

安全性類 $\mathcal{S}$ は語の全体集合 Σ^ω 上で閉集合系と一致することが知られており [1] [2]，その位相空間は**標準 *Cantor* 空間**をなす．

定義 14 (標準 Cantor 空間) 安全性類 $\mathcal{S}$ を閉集合系とする位相空間 $\mathcal{T} = (\Sigma^\omega, \mathcal{S})$ は以下の位相的性質を持ち，**標準 Cantor 空間**という．

1. 完全
2. 完全不連結
3. コンパクト
4. 距離化可能

なお，Σ^ω 上の自然な距離から生成される位相空間は標準 Cantor 空間と一致する．また，$\overline{\mathit{Safety}}$ は標準 Cantor 空間において閉包演算に相当しており，明らかに以下の命題が成り立つ．

命題 3 ([2]) 活性類 $\mathcal{L}$ は標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$ の稠密集合系 $\mathcal{D}$ に一致する．

命題 4 保証性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{C}}$ と罹患性類 $\mathcal{L}^{\mathcal{C}}$ は標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$ の開集合系と補稠密集合系にそれぞれ一致する．

3 補・逆・対偶

定義 4–5，7–13 の各時間的性質は, (強い/弱い）悪性/良性の接頭辞/接尾辞の存在に基づいて定義されており，時間的性質類間の対称性を見出せる．本章では，補類，逆類，対偶類の概念を導入し，各時間的性質類の補関係，逆関係，対偶関係に関して整理し，階層定理を与える．

3.1 二分型時間的性質類

本稿では，接頭辞/接尾辞の限量に基づいて定義される時間的性質類のみに注目する．即ち，時間的性質 $P \subseteq \Sigma^\omega$ に関して，語全体 $\sigma \in \Sigma^\omega$ に関する限量，接頭辞 $s \in \Sigma^*$ に関する限量，接尾辞 $\sigma' \in \Sigma^\omega$ に対する限量によって記述される以下を満たす一階述語論理式 $F(P)$ で定められる時間的性質類 $\mathcal{P} = \{P \subseteq \Sigma^\omega \mid F(P)\}$ のみに注目する．

1. 限量の深さは 3 以下である．
2. 語全体に関する限量は最上位にしか出現しない．
3. 接頭辞に関する限量の下位には，接頭辞に関する限量は出現しないかつ接尾辞に関する限量も高々1 つしか出現しない．
4. 接尾辞に関する限量の下位には，接尾辞に関する限量は出現しないかつ接頭辞に関する限量も高々1 つしか出現しない．

この形で定義できる時間的性質類を**二分型時間的性質類**と呼ぶこととする．

例えば，安全性は式

$$F_1(P,Q_1,Q_2,Q_3) \stackrel{\text{def}}{=} Q_1.(\sigma \notin P \Rightarrow Q_2.Q_3.s\sigma' \notin P) \quad (11)$$

に対して，$Q_1 \stackrel{\text{def}}{=} \forall\sigma \in \Sigma^\omega$，$Q_2 \stackrel{\text{def}}{=} \exists s \in \mathit{pref}(\sigma)$，$Q_3 \stackrel{\text{def}}{=} \forall\sigma' \in \Sigma^\omega$ として，活性は式

$$F_2(P,Q_1,Q_2,Q_3) \stackrel{\text{def}}{=} Q_1.Q_2.Q_3.s\sigma' \in P \quad (12)$$

に対して，$Q_1 \stackrel{\text{def}}{=} \forall\sigma \in \Sigma^\omega$，$Q_2 \stackrel{\text{def}}{=} \forall s \in \mathit{pref}(\sigma)$，$Q_3 \stackrel{\text{def}}{=} \forall\sigma' \in \Sigma^\omega$ としてそれぞれ得られる一階述語論理式で定められる時間的性質類である．

3.2 補類

悪性-良性の対称性に関しては，保証性がしばしば補安全性と呼ばれることからわかる通り，時間的性質に限らず，集合間の補関係を類間関係へと拡張する形で広く取り扱われている．例えば，位相空間論においても，閉集合系と開集合系，稠密集合系と補稠密集合系の関係は補関係である．

定義 15 (補類) 一階述語論理式 F で定められる二分型時間的性質類 $\mathcal{P} = \{P \subseteq \Sigma^\omega \mid F(P)\}$ に対し，時間的性質類 $\mathcal{P}^\mathcal{C} = \{P \subseteq \Sigma^\omega \mid F(P^{-1})\}$ を $\mathcal{P}$ の**補類**という

$\cdot^\mathcal{C}$ を補類演算と呼ぶ．既知の事実として，補類演算に関して以下の関係が成り立つ．

- $\texttt{Guarantee} = \texttt{Safety}^\mathcal{C}$ [9],
- $\texttt{Abs-Liveness} = \texttt{Stability}^\mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$ [14],
- $\texttt{Morbidity} = \texttt{Liveness}^\mathcal{C}$ [10].

即ち，空言語（恒偽）でない補安定性は絶対活性であり，また補活性は罹患性である．

3.3 逆類

接頭辞-接尾辞の対称性に関しては，限量の対象の入れ替える逆関係と解釈できる．安全性-安定性と活性-罹患性の厳密に逆関係であり，絶対活性-保証性も空集合 $\emptyset$ を除き逆関係をなす．なお，接頭辞と接尾辞に関する限量の入れ替えに基づく関係であり単純な集合演算に帰着できないため，一般的な類間の関係として定義できるわけではない．

定義 16 (逆類) $Q_{1,1},\ldots,Q_{1,N}$ を語全体に関する限量群，$Q_{2,n,1},\ldots,Q_{2,n,M(n)}$ を $Q_{1,n}$ の次位にある接頭辞/接尾辞に関する限量群，$Q_{3,n,m,1},\ldots,Q_{3,n,m,L(n,m)}$ を $Q_{2,n,m}$ の次位にある最下位の接頭辞/接尾辞に関する限量群とする．これらで記述される一階述語論理式

$$F(P,Q_{1,1},\ldots,Q_{1,N},\ Q_{2,1,1},\ldots,Q_{2,N,M(N)},\ Q_{3,1,1,1},\ldots,Q_{3,N,M(N),L(N,M(N))})$$

で定められる二分型時間的性質類 $\mathcal{P} = \{P \subseteq \Sigma^\omega \mid F(P,Q_{1,1},\ldots,Q_{1,N},Q_{2,1,1},\ldots,Q_{2,N,M(N)},Q_{3,1,1},\ldots,Q_{3,N,M(N)})\}$ に対し，時間的性質類 $\mathcal{P}^\mathcal{R} = \{P \subseteq \Sigma^\omega \mid F(P,Q_{1,1},\ldots,Q_{1,N},Q'_{2,1,1},\ldots,Q'_{2,N,M(N)},Q'_{3,1,1,1},\ldots,Q'_{3,N,M(N),L(N,M(N))})\}$ を $\mathcal{P}$ の**逆類**という．ただし，$1 \le n \le N$，$1 \le m \le M(n)$，$1 \le l \le L(n,m)$，$q \in \{\exists,\forall\}$ に対して，

$$Q'_{2,n,m} = \begin{cases} qs \in \Sigma^* & \text{if } Q_{2,n,m} = q\sigma' \in \Sigma^\omega, \\ qs \in \mathit{pref}(\sigma) & \text{if } Q_{2,n,m} = q\sigma' \in \mathit{suff}(\sigma), \\ q\sigma' \in \Sigma^\omega & \text{if } Q_{2,n,m} = qs \in \Sigma^*, \\ q\sigma' \in \mathit{suff}(\sigma) & \text{if } Q_{2,n,m} = qs \in \mathit{pref}(\sigma), \end{cases}$$

$$Q'_{3,n,m,l} = \begin{cases} qs \in \Sigma^* & \text{if } Q_{3,n,m,l} = q\sigma' \in \Sigma^\omega, \\ qs \in \mathit{pref}(\sigma) & \text{if } Q_{3,n,m,l} = q\sigma' \in \mathit{suff}(\sigma), \\ q\sigma' \in \Sigma^\omega & \text{if } Q_{3,n,m,l} = qs \in \Sigma^*, \\ q\sigma' \in \mathit{suff}(\sigma) & \text{if } Q_{3,n,m,l} = qs \in \mathit{pref}(\sigma). \end{cases}$$

$\cdot^R$ を逆類演算と呼ぶ．各時間的性質の定義と空言語でない補安定性が絶対活性であること [14] から，逆類演算に関して以下の関係が成り立つ．

- $\texttt{Stability} = \texttt{Safety}^\mathcal{R}$,
- $\texttt{Abs-Liveness} = \texttt{Guarantee}^\mathcal{R} \setminus \{\emptyset\}$.

即ち，逆安全性は安定性であり，空言語（恒偽）でない逆保証性は絶対活性である．

3.4 対偶類

含意命題の裏・逆から対偶命題が得られるように，時間的性質類の補・逆から対偶類が得られる．

定義 17 (対偶類) 二分型時間的性質類 $\mathcal{P} \subseteq 2^{\Sigma^\omega}$ に

対し，時間的性質類 $\mathcal{P}^{\mathcal{CR}}$ を $\mathcal{P}$ の**対偶類**という．

各時間的性質の定義より，対偶類演算に関して以下の関係が成り立つ．

- $\texttt{Abs-Liveness} = \texttt{Safety}^{\mathcal{CR}} \setminus \{\emptyset\}$,
- $\texttt{Stability} = \texttt{Guarantee}^{\mathcal{CR}}$.

即ち，空言語（恒偽）でない対偶安全性は絶対活性であり，対偶保証性は安定性である．また，各時間的性質の定義より，対偶類演算及び補集合に関して以下の関係も成り立つ．

- $\texttt{Unif-Liveness} = \texttt{Liveness}^{-\mathcal{CR}}$.

即ち，非対偶活性は一様活性である．なお，この呼称に合わせると，非活性，非補活性（非罹患性），非逆活性のことをそれぞれ一様対偶活性，一様逆活性，一様補活性とも呼べる．

3.5 合成類

本節では，時間的性質類の合成により得られる，対称性をもつ時間的性質類について論じる．

悪性-良性の対称性を**補対称性**と呼ぶことにする．自身でこの対称性を有する時間的性質類は以下のように定義できる．

定義 18 (補対称類) $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\mathcal{C}}$ であるような時間的性質類 $\mathcal{P} \subseteq 2^{\Sigma^\omega}$ を**補対称類**という．

安全性類及び活性類を基に，次の補対称類が得られる．

- $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$：接頭強依存性類
  - Borel 階層では $\mathbf{\Delta}^0_1$ 集合に相当する．
  - 強い悪性接頭辞と強い良性接頭辞の長さが有界になるため，有界性類とも言える．
- $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{\mathcal{C}}$：接尾依存性類
- $\mathcal{S}^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$：接尾強依存性
  - 狭義公平性 [14] と空集合を含むか否かの違いしかないため，**広義公平性**とも言える．
- $\mathcal{L}^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{L}^{\mathcal{CR}}$：接頭依存性

既知の事実 [10] として，非活性類と非補活性類から得られる補対称類に関して以下の関係が成り立つ．

- $\texttt{quaestio} = \texttt{Liveness}^{-1} \cap \texttt{Liveness}^{-\mathcal{C}}$.

なお，既知の事実として以下の関係が成り立ち [14]，狭義公平性は補対称類ではない．

$$\begin{aligned}\texttt{Fairness} &= \texttt{Abs-Liveness} \cap \texttt{Stability} \\ &= \mathcal{S}_P^{\mathcal{CR}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{R}} \\ &\neq (\mathcal{S}_P^{\mathcal{CR}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{R}})^{\mathcal{C}} = \mathcal{S}_P^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{CR}}. \qquad (13)\end{aligned}$$

一方で，接頭辞-接尾辞の対称性を**逆対称性**と呼ぶことにする．自身でこの対称性を有する時間的性質類は以下のように定義できる．

定義 19 (逆対称類) $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\mathcal{R}}$ であるような時間的性質類 $\mathcal{P} \subseteq 2^{\Sigma^\omega}$ を**逆対称類**という．

安全性類及び活性類を基に，次の逆対称類が得られる．

- $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{R}}$：**双安全性類**
- $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{\mathcal{R}}$：**双活性類**
- $\mathcal{S}^{\mathcal{C}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$：双保証性類
- $\mathcal{L}^{\mathcal{C}} \cap \mathcal{L}^{\mathcal{CR}}$：双罹患性類

さらに，活性に基づく非自明の補対称かつ逆対称な時間的性質類が存在する．

- $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{L}^{\mathcal{C}} \cap \mathcal{L}^{\mathcal{CR}}$：全依存性類

例えば，時間的性質 $(a\Sigma^*(a\Sigma^*)^\omega) \cup ((\Sigma \setminus \{a\})\Sigma^*(\Sigma \setminus \{a\})^\omega) \subseteq \Sigma^\omega$ は全依存性である．

一方で，真安全性類 $\mathcal{S}_P$ とその対偶類 $\mathcal{S}_P^{\mathcal{CR}}$，真安定性類 $\mathcal{S}_P^{\mathcal{R}}$ とその対偶類 $\mathcal{S}_P^{\mathcal{C}}$ はそれぞれ互いに素であるため，安全性に基づく非自明な補対称かつ逆対称な時間的性質類は存在しない．

$$\mathcal{S}_P \cap \mathcal{S}_P^{\mathcal{CR}} = \mathcal{S}_P^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S}_P^{\mathcal{C}} = \emptyset, \qquad (14)$$

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{C}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{CR}} = \{\Sigma, \emptyset\}. \qquad (15)$$

3.6 階層定理

Alpern らは絶対活性類（真対偶安全性類），一様活性類（非対偶活性類），活性類に関して，その階層関係を示していた [1]．また，Peled らは安全性類，活性類，保証性類（補安全性類），罹患性類（補活性類），疑問性類（非活性かつ非補活性な補対称類）に関して，その階層定理を示した [10]．本稿では，安全性類及び活性類を基礎とするその他の時間的性質類を含めたより詳細な階層定理を示す．

定理 2 (階層定理) $\alpha \in \{1, \mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{CR}\}$ に対して，以下が成り立つ．

$$\mathcal{S}_P^{\alpha} \subset (\mathcal{L}^{\alpha})^{-1} \subset (\mathcal{L}^{\alpha})^{\mathcal{CR}}. \qquad (16)$$

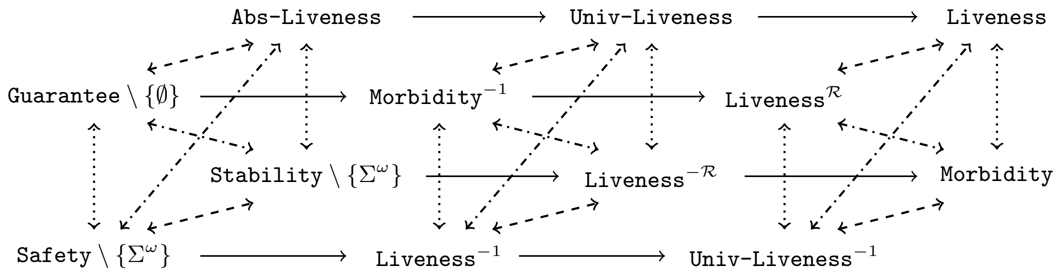

図 1　時間的性質類間の関係．なお，点線両矢印 は補関係，破線両矢印 は逆関係，鎖線両矢印 は対偶関係，実線矢印 $\rightarrow$ は包含関係 $\subset$ である．

証明 1 (定理 2 の証明) 各性質的性質類の定義より明らか． $\square$

以上のように，各時間的性質類の間には完全な対称性がある包含関係階層が成り立つ（図 1）．

4　言語的特性

本章では，各時間的性質の言語的特性について成分構成可能性と分解可能性の観点から論じる．成分構成は時間的性質の近似に有用であり．分解は段階的検証や欠陥分析等への活用が見込める．

4.1　成分

定義 6 及び命題 1 より，任意の時間的性質に対して，安全性成分が得られる.「満たさない語には強い悪性接頭辞が存在する性質」の類である安全性類 $\mathcal{S}$ と「満たさない語には強い悪性接尾辞が存在する性質」の類である安定性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ の逆対称性から，安全性類と同様に，元の時間的性質を含む最小の安定性（安定性成分）が一意に定まると予想できる．この予想通り，実際に安定性成分が一意に定まり，また構成できる．

定義 20 (安定性成分) 時間的性質 P を含む最小の安定性 $\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)$ を，P の**安定性成分**という．

定理 3
$$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) = \mathit{Suff}(P). \tag{17}$$

証明 2 (定理 3 の証明) 任意の語 $\sigma \in \Sigma^\omega$ について，

$$\begin{aligned}
\sigma \in \mathit{Suff}(P) &\Rightarrow \sigma \in \bigcup_{\sigma' \in P} \mathit{suff}(\sigma') \\
&\Rightarrow \exists \sigma' \in P. \sigma \in \mathit{suff}(\sigma') \\
&\Rightarrow \exists \sigma' \in P. \forall \sigma'' \in \mathit{suff}(\sigma). \sigma'' \in \mathit{suff}(\sigma') \\
&\Rightarrow \forall \sigma'' \in \mathit{suff}(\sigma). \sigma'' \in \bigcup_{\sigma' \in P} \mathit{suff}(\sigma') \\
&\Rightarrow \forall \sigma'' \in \mathit{suff}(\sigma). \sigma'' \in \mathit{Suff}(P) \\
&\Rightarrow \mathit{suff}(\sigma) \subseteq \mathit{Suff}(P).
\end{aligned} \tag{18}$$

即ち，$\mathit{Suff}(P)$ は安定性である．

また，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)$ が P を含む安定性であるため，

$$\begin{aligned}
\sigma \in P &\Rightarrow \sigma \in \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) \\
&\Rightarrow \forall \sigma' \in \mathit{suff}(\sigma). \sigma' \in \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) \\
&\Rightarrow \mathit{suff}(\sigma) \subseteq \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)
\end{aligned} \tag{19}$$

即ち，$\mathit{Suff}(P) \subseteq \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)$ が成り立つ．

そして，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)$ は最小であるため，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) \subseteq \mathit{Suff}(P)$ が成り立つ．

以上より，式 (17) が成り立つ． $\square$

一方で，保証性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{C}}$ と対偶安全性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$ の逆対称性からは，保証性類と同様に，元の時間的性質を含む最小の対偶安全性（対偶安全性成分）が一意に定まらないように予想される．この予想に反し，実際には一意に定まり，また構成できる．

定義 21 (対偶安全性成分) 時間的性質 P を含む最小の対偶安全性 $\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P)$ を，P の**対偶安全性成分**という．

定理 4
$$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P) = \Sigma^* P. \tag{20}$$

証明 3 (定理 4 の証明) 任意の語 $\sigma \in \Sigma^\omega$ について，

$$\sigma \in \Sigma^* P \Rightarrow \Sigma^* \sigma \subseteq \Sigma^* P. \tag{21}$$

即ち，$\Sigma^* P$ は対偶安全性である．

また，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P)$ が P を含む対偶安全性であるため，

$$\begin{aligned}\sigma \in P &\Rightarrow \sigma \in \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P)\\ &\Rightarrow \Sigma^*\sigma \subseteq \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P).\end{aligned} \tag{22}$$

即ち，$\Sigma^* P \subseteq \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P)$ が成り立つ．

そして，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P)$ は最小であるため，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P) \subseteq \Sigma^* P$ が成り立つ．

以上より，式 (20) が成り立つ． □

また，安全性成分及び安定性成分の合成により，双安定性（安全性かつ安定性）成分も一意に得ることが可能である．

定義 22 (双安全性成分) 時間的性質 P を含む最小の双安定性 $\overline{\mathit{Bisafety}}(P)$ を，P の**双安全性成分**という．

定理 5
$$\overline{\mathit{Bisafety}}(P) = \overline{\mathit{Safety}}(\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)). \tag{23}$$

証明 4 (定理 5 の証明) 定義 6 より，明らかに $\overline{\mathit{Safety}}(\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))$ は安全性である．命題 1 より，

$$\begin{aligned}&\sigma \in \overline{\mathit{Safety}}(\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))\\ &\quad\Rightarrow \mathit{pref}(\sigma) \subseteq \mathit{Pref}(\mathit{Suff}(P))\\ &\quad\Rightarrow \mathit{Pref}(\mathit{suff}(\sigma)) \subseteq \mathit{Pref}(\mathit{Suff}(P))\\ &\quad\Rightarrow \forall\sigma' \in \mathit{suff}(\sigma).\mathit{Pref}(\mathit{suff}(\sigma')) \subseteq \mathit{Pref}(\mathit{Suff}(P))\\ &\quad\Rightarrow \forall\sigma' \in \mathit{suff}(\sigma).\mathit{pref}(\sigma') \subseteq \mathit{Pref}(\mathit{Suff}(P))\\ &\quad\Rightarrow \mathit{suff}(\sigma) \subseteq \overline{\mathit{Safety}}(\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)).\end{aligned} \tag{24}$$

即ち，$\overline{\mathit{Safety}}(\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))$ は安定性でもある．従って，$\overline{\mathit{Safety}}(\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))$ は双安全性である．

また，$\overline{\mathit{Bisafety}}(P)$ が P を含む双安定性であるため，

$$P \subseteq \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) \subseteq \overline{\mathit{Bisafety}}(P). \tag{25}$$

従って，

$$\begin{aligned}\overline{\mathit{Safety}}(\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)) &\subseteq \overline{\mathit{Safety}}(\overline{\mathit{Bisafety}}(P))\\ &= \overline{\mathit{Bisafety}}(P).\end{aligned} \tag{26}$$

そして，$\overline{\mathit{Bisafety}}(P)$ は最小であるため，$\overline{\mathit{Bisafety}}(P) \subseteq \overline{\mathit{Safety}}(\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))$ が成り立つ．

以上より，式 (23) が成り立つ． □

なお，語 $\sigma = (ab)(ab^2)(ab^3)\ldots(ab^n)\ldots \in \Sigma^\omega$ のみからなる時間的性質 $\{\sigma\} \subseteq \Sigma^\omega$ に対して，任意の $n, m \in \mathbb{N}$（$n < m$）について $b^n a b^m \in \mathit{Pref}(\mathit{suff}(\sigma))$ なので，

$$\begin{aligned}\overline{\mathit{Safety}}(\{\sigma\}) &= \{\sigma\},\\ \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(\overline{\mathit{Safety}}(\{\sigma\})) &= \mathit{suff}(\sigma),\\ \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(\{\sigma\}) &= \mathit{suff}(\sigma),\\ \overline{\mathit{Safety}}(\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(\{\sigma\})) &= \mathit{suff}(\sigma) \cup \mathit{Suff}(b^+ab^\omega)\end{aligned}$$

であり，一般には $\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(\overline{\mathit{Safety}}(P))$ は双安全性であるとは限らず，次の包含関係が成り立つ．

$$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(\overline{\mathit{Safety}}(P)) \subseteq \overline{\mathit{Bisafety}}(P). \tag{27}$$

ただし，ω-正規言語や ω-文脈自由言語等により定義される時間的性質の安全性成分に関して以下の定理が成り立つ．

定理 6 有限長言語族 $A_\lambda, B_\lambda \subseteq \Sigma^*$（ただし，$\varepsilon \notin B_\lambda$）から生成される時間的性質

$$P = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda B_\lambda^\omega \tag{28}$$

に対して，

$$\overline{\mathit{Bisafety}}(P) = \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(\overline{\mathit{Safety}}(P)). \tag{29}$$

証明 5 (定理 6 の証明) 有限長言語 $P' = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda B_\lambda^*$ について，

$$\begin{aligned}\mathit{Pref}(\mathit{Suff}(P)) &= \mathit{Pref}(\mathit{Suff}(P'))\\ &= \mathit{Suff}(\mathit{Pref}(P'))\\ &= \mathit{Suff}(\mathit{Pref}(P))\end{aligned} \tag{30}$$

であるため，

$$\begin{aligned}&\sigma \in \overline{\mathit{Safety}}(\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))\\ &\quad\Rightarrow \mathit{pref}(\sigma) \subseteq \mathit{Pref}(\mathit{Suff}(P))\\ &\quad\Rightarrow \mathit{pref}(\sigma) \subseteq \mathit{Suff}(\mathit{Pref}(P'))\\ &\quad\Rightarrow \exists\sigma' \in \Sigma^\omega.\sigma \in \mathit{suff}(\sigma') \wedge \mathit{pref}(\sigma') \subseteq \mathit{Pref}(P')\\ &\quad\Rightarrow \sigma \in \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(\overline{\mathit{Safety}}(P'))\\ &\quad\Rightarrow \sigma \in \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(\overline{\mathit{Safety}}(P)).\end{aligned} \tag{31}$$

よって，式 (27) と合わせて，式 (29) が成り立つ． □

さらに，安定性成分及び対偶安全性成分の合成により，広義公平性（安定性かつ対偶安全性）成分も一意に得ることが可能である．

定義 23 (広義公平性成分) 時間的性質 P を含む最小の広義公平性 $\overline{\mathit{Fairness}}(P)$ を，P の**広義公平性成分**という．

定理 7 $\overline{Fairness}(P) = \overline{Safety}^{\mathcal{CR}}(\overline{Safety}^{\mathcal{R}}(P)).$ (32)

証明 6 (定理 7 の証明) 任意の語 $\sigma \in \Sigma^\omega$ について，

$$\begin{aligned}
&\sigma \in \Sigma^* \mathit{Suff}(P)\\
&\quad\Rightarrow \sigma \in \bigcup_{\sigma' \in P} \Sigma^* \mathit{suff}(\sigma')\\
&\quad\Rightarrow \exists \sigma' \in P. \sigma \in \Sigma^* \mathit{suff}(\sigma')\\
&\quad\Rightarrow \exists \sigma' \in P. \forall \sigma'' \in \mathit{suff}(\sigma). \sigma'' \in \Sigma^* \mathit{suff}(\sigma')\\
&\quad\Rightarrow \forall \sigma'' \in \mathit{suff}(\sigma). \sigma'' \in \bigcup_{\sigma' \in P} \Sigma^* \mathit{suff}(\sigma')\\
&\quad\Rightarrow \forall \sigma'' \in \mathit{suff}(\sigma). \sigma'' \in \Sigma^* \mathit{Suff}(P)\\
&\quad\Rightarrow \mathit{suff}(\sigma) \subseteq \Sigma^* \mathit{Suff}(P).
\end{aligned} \tag{33}$$

即ち，$\Sigma^* \mathit{Suff}(P)$ は安定性である．さらに，

$$\sigma \in \Sigma^* \mathit{Suff}(P) \Rightarrow \Sigma^* \sigma \subseteq \Sigma^* \mathit{Suff}(P). \tag{34}$$

即ち，$\Sigma^* \mathit{Suff}(P)$ は対偶安定性でもある．従って，$\Sigma^* \mathit{Suff}(P)$ は広義公平性である．

また，$\overline{Fairness}(P)$ が P を含む広義公平性であるため，

$$\begin{aligned}
\sigma \in P &\Rightarrow \sigma \in \overline{Fairness}(P)\\
&\Rightarrow \mathit{suff}(\sigma) \subseteq \overline{Fairness}(P)\\
&\Rightarrow \Sigma^* \mathit{suff}(\sigma) \subseteq \overline{Fairness}(P)
\end{aligned} \tag{35}$$

即ち，$\Sigma^* \mathit{Suff}(P) \subseteq \overline{Fairness}(P)$ が成り立つ．

そして，$\overline{Fairness}(P)$ は最小であるため，$\overline{Fairness}(P) \subseteq \Sigma^* \mathit{Suff}(P)$ が成り立つ．

以上より，式 (32) が成り立つ． □

なお，語 $\sigma = \{ab^\omega\} \in \Sigma^\omega$ のみからなる時間的性質 $\{\sigma\} \subseteq \Sigma^\omega$ に対して，

$$\begin{aligned}
\overline{Safety}^{\mathcal{R}}(\{\sigma\}) &= \{ab^\omega, b^\omega\},\\
\overline{Safety}^{\mathcal{CR}}(\overline{Safety}^{\mathcal{R}}(\{\sigma\})) &= \Sigma^* b^\omega,\\
\overline{Safety}^{\mathcal{CR}}(\{\sigma\}) &= \Sigma^* ab^\omega,\\
\overline{Safety}^{\mathcal{R}}(\overline{Safety}^{\mathcal{CR}}(\{\sigma\})) &= \Sigma^* ab^\omega \cup \{b^\omega\}
\end{aligned}$$

であり，一般には $\overline{Safety}^{\mathcal{R}}(\overline{Safety}^{\mathcal{CR}}(P))$ は広義公平性であるとは限らず，次の包含関係が成り立つ．

$$\overline{Safety}^{\mathcal{R}}(\overline{Safety}^{\mathcal{CR}}(P)) \subseteq \overline{Fairness}(P). \tag{36}$$

また，ω-正規言語や ω-文脈自由言語等により定義される時間的性質の広義公平性成分及びその補集合に関して以下の定理が成り立つ．

定理 8 有限長言語族 $A_\lambda, B_\lambda \subseteq \Sigma^*$ （ただし，$\varepsilon \notin B_\lambda$）から生成される式 (28) で与えられる時間的性質に対して，

$$\mathit{Suff}_\omega(P) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{Safety}^{\mathcal{R}}(B_\lambda^\omega) \tag{37}$$

とする．このとき，以下の各式が成り立つ．

$$\mathit{Suff}_\omega(P) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathit{Suff}_n(P), \tag{38}$$

$$\overline{Fairness}(P) = \overline{Safety}^{\mathcal{CR}}(\mathit{Suff}_\omega(P)), \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
&(\overline{Fairness}(P))^{-1}\\
&\quad= \begin{cases} \overline{Safety}^{\mathcal{CR}}((\mathit{Suff}_\omega(P))^{-1}) & \text{if } \mathit{Suff}_\omega(P) \neq \Sigma^\omega,\\ \emptyset & \text{otherwise.}\end{cases}
\end{aligned} \tag{40}$$

証明 7 (定理 8 の証明) Suff の定義より，一般に任意の時間的性質 $Q \subseteq \Sigma^\omega$ に対して $\mathit{Suff}_{i+1}(Q) \subseteq \mathit{Suff}_i(Q)$ である．また，P の構成より，任意の $n, m \in \mathbb{N}$ について，

$$\begin{aligned}
\mathit{Suff}_n(A_\lambda B_\lambda^\omega) &= \mathit{Suff}_n(A_\lambda B_\lambda^* B_\lambda^\omega)\\
&\supseteq \mathit{Suff}_m(B_\lambda^\omega) = \mathit{Suff}(B_\lambda^\omega).
\end{aligned} \tag{41}$$

従って，式 (38) が成り立つ．

そして，任意の文字 a 及び語 $\sigma \in \Sigma^\omega$ に対して $a\sigma \in \Sigma\sigma$ であるため，

$$\Sigma^*(\mathit{Suff}_\omega(P)) = \Sigma^*(\mathit{Suff}(P)). \tag{42}$$

即ち，式 (39) が成り立つ．

さらに，

$$\begin{aligned}
\sigma \notin \Sigma^* \mathit{Suff}_\omega(P) &\Rightarrow \mathit{suff}(\sigma) \cap \Sigma^* \mathit{Suff}_\omega(P) = \emptyset\\
&\Rightarrow \mathit{suff}(\sigma) \cap \mathit{Suff}_\omega(P) = \emptyset\\
&\Rightarrow \mathit{suff}(\sigma) \subseteq (\mathit{Suff}_\omega(P))^{-1}\\
&\Rightarrow \sigma \in \Sigma^*(\mathit{Suff}_\omega(P))^{-1}.
\end{aligned} \tag{43}$$

従って，式 (40) が成り立つ． □

さらに，安定性類と対偶安全性類の間には補対称性 [14] があり，広義公平性は補対称類である．従って，双対性により，任意の時間的性質 P に対してそれに含まれる最大の安定性，対偶安全性及び広義公平性をそれぞれ一意に構成できる．

定義 24 (下方成分) 任意の時間的性質 P に対してそれに含まれる最大の安定性 $\underline{Safety}^{\mathcal{R}}(P)$，対偶安全性 $\underline{Safety}^{\mathcal{CR}}(P)$ 及び広義公平性 $\underline{Fairness}(P)$ をそれぞれ**下方安定性成分**，**下方対偶安全性成分**及び**下方広義公平性成分**という．

系 1 時間的性質 P に対して，以下の各式が成り立つ．

$$\underline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) = (\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P^{-1}))^{-1}, \quad (44)$$

$$\underline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P) = (\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P^{-1}))^{-1}, \quad (45)$$

$$\underline{\mathit{Fairness}}(P) = (\overline{\mathit{Fairness}}(P^{-1}))^{-1}. \quad (46)$$

証明 8 (系 1 の証明) 定理 3，定理 4 と定理 7 より明らか． □

定義 6，定義 20，定義 21，定義 22 及び定義 23 で与えられる各成分を下方成分と明示的に区別する際には，それぞれ上方安全性成分，上方安定性成分，上方対偶安全性成分，上方双安全性成分及び上方広義公平性成分と呼ぶこととする．また，以降では，単集合 $\{\sigma\}$ の各成分は**原子的**であるという．

定理 3–7 及び系 1 の各成分構成可能性は，次章で示す位相的特性からも説明できる．つまり，これら上方成分/下方成分を構成可能な時間的性質類は閉集合系/開集合系を成し，各上方成分/下方成分はそれぞれの位相空間における閉包/開核に対応する．

4.2 分解

定理 1 が示すように，任意の時間的性質は安全性と活性に積分解できる．各時間的性質類の対称性を考慮すると，同様の積分解が可能であると予想できる．実際，安定性（逆安全性）と逆活性に積分解が可能である．

定理 9 (安定性-逆活性積分解) 任意の時間的性質 P に対して，時間的性質

$$P' = P \cup (\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))^{-1} \quad (47)$$

は逆活性である．さらに，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) \neq \Sigma^{\omega}$ であるとき，P' は非対偶活性（一様活性）である．

証明 9 (定理 9 の証明) 語 $\sigma_1 \in \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)$ について，$\mathit{suff}(\sigma_1) \subseteq \mathit{Suff}(P)$ であるため，

$$\sigma_1 \in \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) \Rightarrow \forall \sigma' \in \mathit{suff}(\sigma_1). \exists s \in \Sigma^*. s\sigma' \in P. \quad (48)$$

一方で，語 $\sigma_2 \notin \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)$ について，$(\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))^{-1}$ を偽にする強い悪性接尾辞 $\sigma_{bad} \in \mathit{suff}(\sigma_2)$ が存在する．ここで，σ_{bad} は最短の強い悪性接尾辞と仮定する．σ_{bad} より短い接尾辞 $\sigma_3 \in \mathit{suff}(\sigma_{bad})$ に対して，σ_{bad} と等しくさせるような接頭辞は，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)$ を偽にする．つまり，

$$\forall \sigma_3 \in \mathit{suff}(\sigma_2). (\sigma_3 \in \mathit{suff}(\sigma_{bad}) \Rightarrow \exists s \in \Sigma^*. s\sigma_3 \notin \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)). \quad (49)$$

また，σ_{bad} より長い接尾辞 $s_1\sigma_{bad} \in \mathit{suff}(\sigma_2)$ に対しては，空列 ε は $\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)$ を偽にする接尾辞となる．つまり，

$$\forall \sigma_4 \in \mathit{suff}(\sigma_2). (\sigma_4 = s_1\sigma_{bad} \Rightarrow \exists s \in \Sigma^*. s\sigma_4 \notin \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P)). \quad (50)$$

そして，式 (49)–(50) と合わせると，

$$\sigma_2 \notin \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) \Rightarrow \forall \sigma' \in \mathit{suff}(\sigma_2). \exists s \in \Sigma^*. s\sigma' \notin \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P). \quad (51)$$

式 (48) と式 (51) より，

$$\forall \sigma \in \Sigma^{\omega}. \exists s \in \Sigma^*. s\sigma \in P \cup (\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))^{-1}, \quad (52)$$

即ち，P' は逆活性である．

さらに，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) \neq \Sigma^{\omega}$ のとき，$(\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))^{-1}$ は真対偶安全性類 $\mathcal{S}_P^{\mathcal{CR}}$ に属すため，定義より，$(\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))^{-1}$ に対する強い良性接尾辞 $\sigma \in \Sigma^{\omega}$ が存在する．$P' \supseteq (\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))^{-1}$ であるため，この s は P' においても強い良性接尾辞である．即ち，P' は非対偶活性（一様活性）である． □

なお，同様に，安全性-活性積分解において $\overline{\mathit{Safety}}(P) \neq \Sigma^{\omega}$ のとき，安全性と対になる活性 P' は非罹患性（一様逆活性）でもある．また，双安全性（安全性かつ安定性）成分の利用した積分解が可能である．

定理 10 (双安全性-双活性積分解) 任意の時間的性質 P に対して，

$$P' = P \cup (\overline{\mathit{Bisafety}}(P))^{-1} \quad (53)$$

は双活性（活性かつ逆活性）である．さらに，$\overline{\mathit{Bisafety}}(P) \neq \Sigma^{\omega}$ であるとき，P' は非対偶活性（一様活性）かつ非罹患性（一様逆活性）でもある．

証明 10 (定理 10 の証明) 定理 1，5–9 より明らか． □

一方で，積分解の対になれない保証性類の逆類である対偶安全性類も成分構成でき，任意の時間的性質 P を対偶安全性成分 $\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P)$ と何らかの時間的性質 P_1 との対として積分解できる．

$$P_1 = P \cup (\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P))^{-1}. \tag{54}$$

ただし，P_1 が属する類は活性類及びその補・逆・対偶類とは一致しない．

そして，対偶安全性類と同様に，任意の時間的性質 P を広義公平性成分 $\overline{\mathit{Fairness}}(P)$ と何らかの時間的性質 P_2 との対として積分解できる．

$$P_2 = P \cup (\overline{\mathit{Fairness}}(P))^{-1}. \tag{55}$$

なお,

$$\begin{aligned} P &= \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) \cap (P \cup (\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))^{-1}) \\ &= \overline{\mathit{Fairness}}(P) \cap (P \cup (\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))^{-1}) \\ &\quad \cap (\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) \cup (\overline{\mathit{Fairness}}(P))^{-1}) \\ &= \overline{\mathit{Fairness}}(P) \cap P_2 \end{aligned} \tag{56}$$

であるため，P_2 は非罹患性 $P \cup (\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P))^{-1}$ と P_1 と同類の時間的性質 $\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) \cup (\overline{\mathit{Fairness}}(P))^{-1}$ の積と同値な時間的性質である．ここで，P が式 (28) の形の場合は，式 (40) より，

$$\begin{aligned} &\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) \cup (\overline{\mathit{Fairness}}(P))^{-1} \\ &\quad = \mathit{Suff}(P) \cup (\Sigma^* \mathit{Suff}(P))^{-1} \\ &\quad \supseteq \mathit{Suff}_\omega(P) \cup \Sigma^*(\mathit{Suff}_\omega(P))^{-1} \end{aligned}$$

であるため，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) \cup (\overline{\mathit{Fairness}}(P))^{-1}$ は逆活性となる．しかし，式 (36) が示す非対称性により，一般には P_2 が属する類は P_1 と同様であり，活性類及びその補・逆・対偶類とは一致しない．ただし，ある条件の下で P_2 は活性（厳密に言えば，非対偶活性/一様活性）となる．

定理 11 (広義公平性-活性積分解) 任意の時間的性質 $P \subseteq \Sigma^\omega$ に対して，$\overline{\mathit{Fairness}}(P) \neq \Sigma^\omega$ ならば，式 (55) の P_2 は非対偶活性（一様活性）である．

証明 11 (定理 11 の証明) $\overline{\mathit{Fairness}}(P) \neq \Sigma^\omega$ のとき，$(\overline{\mathit{Fairness}}(P))^{-1}$ は真対偶安全性（絶対活性）類 $\mathcal{S}_P^{\mathcal{CR}}$ に属すため，定理 9 の証明と同様に，P_2 は非対偶活性（一様活性）である． □

定理 9–10 や式 (54)–(55) の分解可能性も，次章で示す位相的特性から説明できる．つまり，分解された時間的性質類の対は，閉集合系と稠密集合系に対応する．なお，和分解については積分解の双対として得られる．

5 位相的特性

安全性類 $\mathcal{S}$，保証性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{C}}$，活性類 $\mathcal{L}$ 及び罹患性類 $\mathcal{L}^{\mathcal{C}}$ は，標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$ における閉集合系，開集合系，稠密集合系及び補稠密集合系に一致している．本章では，その他の時間的性質類の位相的特性について論じる．取り扱う位相空間が無限長言語 Σ^ω 上で標準的に用いられる標準 Cantor 空間とは大きく異なるため，それらの連結性，コンパクト性及び分離性等を含めて示す．

前章で示した成分構成可能性や分解可能性は，本章の閉集合系及び稠密集合系に関する定理群と対応している．

5.1 逆空間

安全性類 $\mathcal{S}$ と保証性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{C}}$，活性類 $\mathcal{L}$ と罹患性類 $\mathcal{L}^{\mathcal{C}}$ の補対称性は，閉集合系と開集合系，稠密集合系と補稠密集合系の対称性と対応している．安全性類 $\mathcal{S}$ と活性類 $\mathcal{L}$ の組と，安定性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ と逆活性類 $\mathcal{L}^{\mathcal{R}}$ の組の逆対称性と，定理 9 の分解可能性より，安定性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ と逆活性類 $\mathcal{L}^{\mathcal{R}}$ は，安全性類 $\mathcal{S}$ と活性類 $\mathcal{L}$ と同様の役割を持つことができると予想できる．ただし実際には，安定性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ は，安全性類 $\mathcal{S}$ と同様に閉集合系とみなせるだけでなく，開集合系のように任意和に関しても閉じている．

定理 12 安定性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ は閉集合系と開集合系の条件を同時に満たす．

証明 12 (定理 12 の証明) 安定性類 $P \in \mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ は「接頭辞の除去に関して閉じている」[14] ような時間的性質類である．この特性から導出される以下の (i)–(iii) より，安定性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ は閉集合系と開集合系の条件を同時に満たす．

(i): $\Sigma^\omega, \emptyset \in \mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ は明らか．

(ii): 任意の語 σ 及び族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ について，

$$\begin{aligned} \sigma \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F &\Rightarrow \exists F \in \mathcal{F}. \sigma \in F \\ &\Rightarrow \exists F \in \mathcal{F}. \forall \sigma' \in \mathit{suff}(\sigma). \sigma' \in F \\ &\Rightarrow \forall \sigma' \in \mathit{suff}(\sigma). \sigma' \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F. \end{aligned} \tag{57}$$

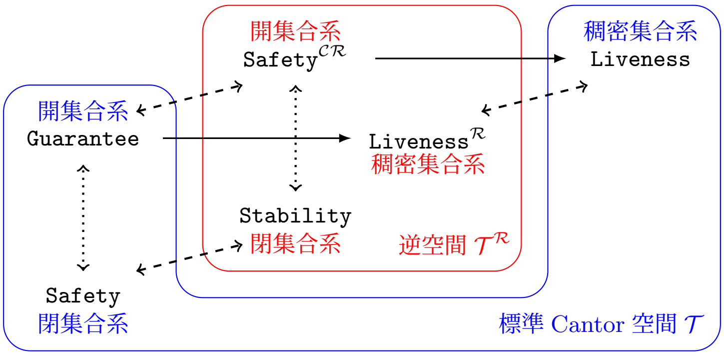

図 2　逆空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$（赤字）vs. 標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$（青字）．なお，点線両矢印 は補関係，破線両矢印 は逆関係，実線三角矢印 は $\{\Sigma^\omega, \emptyset\}$ を除いた上での真包含関係 $\subset$ である．

即ち，安定性の任意和 $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$ は安定性である．

(iii): 任意の語 σ 及び族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ について，

$$\begin{aligned}\sigma \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F &\Rightarrow \forall F \in \mathcal{F}.\sigma \in F\\ &\Rightarrow \forall F \in \mathcal{F}.\forall\sigma' \in \mathit{suff}(\sigma).\sigma' \in F\\ &\Rightarrow \forall\sigma' \in \mathit{suff}(\sigma).\sigma' \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F. \end{aligned} \tag{58}$$

即ち，安定性の任意積 $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$ は安定性である． □

よって，安定性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ を基に，標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$ と「逆」の位相空間が生成できる（図 2）．

定理 13 (逆空間) 安定性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ を閉集合系とする位相空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{R}} = (\Sigma^\omega, \mathcal{S}^{\mathcal{R}})$ は以下の位相的性質を持つ．

(i)　完全

(ii)　非連結かつ非完全不連結

(iii)　非 Lindelöf（⇒ 非コンパクト）

(iv)　非 Kolmogorov かつ非対称的（⇒ 距離化不能）

(v)　Alexandroff

証明 13 (定理 13 の証明) (i): 任意の語 $\sigma \in \Sigma^\omega$ について，σ を含む最小の開集合は $\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(\{\sigma\})$ であるため，孤立点が存在しない．よって，完全（perfect）である．

(ii): 公平性 $P = \Sigma^*(ab)^\omega \in \mathcal{S}^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$ は，非自明な開かつ閉な非単集合であるため，$\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ は連結ではなく，完全不連結でもない．

(iii): 閉かつ開な集合の族 $\{\Sigma^* \mathit{suff}(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma^\omega}$ は明らかに Σ^ω の開被覆である．ここで，Σ^ω は非可算集合（連続体濃度）であるが，Σ^* は可算集合である．また，任意の語 $\sigma \in \Sigma^\omega$ に対して $\mathit{suff}(\sigma)$ は高々可算集合である．よって，集合族 $\{\Sigma^* \mathit{suff}(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma^\omega}$ の可算部分集合は，高々可算集合しか被覆できず，非加算集合である Σ^ω の可算部分被覆にはなり得ない．即ち，$\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ は Lindelöf ではない．

(iv): 2 つの語 $(ab)^\omega, (ba)^\omega \in \Sigma^\omega$ を考える．ここで，$\mathit{suff}((ab)^\omega) = \mathit{suff}((ba)^\omega) = \{(ab)^\omega, (ba)^\omega\}$ かつ $\Sigma^*(ab)^\omega = \Sigma^*(ba)^\omega$ であるため，2 つの語 $(ab)^\omega$ と $(ba)^\omega$ を識別する閉集合（安定性）及び開集合（対偶安全性）は存在しない．よって，$\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ は Kolmogorov ではなく，対称的（R_0）でもない．

(iv): 定理 12 より，明らか． □

逆空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ は，元の標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$ とは完全性（perfectness）を除く位相的性質が全く異なっている．しかし，逆対称性から予想される通り，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}$ は $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ において閉包演算に相当しており，稠密集合系 $\mathcal{D}^{\mathcal{R}}$ は次のように与えられる．

$$\mathcal{D}^{\mathcal{R}} = \{P \subseteq \Sigma^\omega \mid \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) = \Sigma^\omega\}. \tag{59}$$

そして，逆活性類 $\mathcal{L}^{\mathcal{R}}$ は逆空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ において稠密集合系と一致する．つまり，定理 9 の安定性-逆活性積分解可能性は位相的観点からも裏付けられる．

定理 14
$$\mathcal{D}^{\mathcal{R}} = \mathcal{L}^{\mathcal{R}}. \tag{60}$$

証明 14 (定理 14 の証明) 任意の逆活性 $P \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}$ について，逆活性の定義より，P は任意の形の接尾辞を含む．よって，定理 3 より，

$$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P) = \mathit{Suff}(P) = \Sigma^\omega, \tag{61}$$

即ち，逆活性は稠密集合である．

逆に，任意の非逆活性 $P' \notin \mathcal{L}^{\mathcal{R}}$ については，ある語 $\sigma \in \Sigma^\omega$ が存在し，$\sigma \notin \mathit{Suff}(P')$ が成り立つ．従って，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(P') \subset \Sigma^\omega$，即ち，非逆活性は稠密集合でない．

以上により，式 (60) が成り立つ． □

即ち，$\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ の開集合系，開集合系及び稠密集合系は，$\mathcal{T}$ の閉集合系，開集合系及び稠密集合系それぞれの逆類である（図 2）．そのため，$\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ は $\mathcal{T}$ と「完全に逆」な空間であると言える．

また，$\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ は Alexandroff なので，特殊化前順序 $\precsim^{\mathcal{R}}$ から生成される前順序集合 $(\Sigma^\omega, \precsim^{\mathcal{R}})$ と自然に 1 対 1 対応する．

$$\sigma_1 \precsim^{\mathcal{R}} \sigma_2 \Leftrightarrow \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(\{\sigma_1\}) \subseteq \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(\{\sigma_2\}). \tag{62}$$

ここで，$\precsim^{\mathcal{R}}$ から導出される同値関係 $\sim^{\mathcal{R}}$ は $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ 上での識別不能関係に相当し，$\precsim^{\mathcal{R}}$ が対称律を満たさないことと $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ が対称的（R_0）ではないは同値である．そして，同値関係 $\sim^{\mathcal{R}}$ を用いることで，逆空間の商位相空間が生成できる．

定理 15 (商逆空間) 逆空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ の商位相空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}/{\sim^{\mathcal{R}}} = (\Sigma^\omega/{\sim^{\mathcal{R}}}, \mathcal{S}^{\mathcal{R}}/{\sim^{\mathcal{R}}})$ は以下の位相的性質を持つ．

(i) 完全
(ii) 非連結かつ非完全不連結
(iii) 非 Lindelöf（⇒ 非コンパクト）
(iv) Kolmogorov かつ非対称的 （⇒ 距離化不能）
(v) Alexandroff

証明 15 (定理 15 の証明) (i)–(iii) 及び (v): 定理 13 の証明 (i)–(iii) 及び (v) と同様である．

(iv): 2 語 $ab^\omega, b^\omega \in \Sigma^\omega/{\sim^{\mathcal{R}}}$ について，$b^\omega \prec^{\mathcal{R}} ab^\omega$ であるため，$\precsim^{\mathcal{R}}$ は対称律を満たさない．従って，$\mathcal{T}^{\mathcal{R}}/{\sim^{\mathcal{R}}}$ は Kolmogorov だが対称的（R_0）ではない． □

なお，閉包演算 $\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}$ の定義（定理 3）より，任意の語 $\sigma \in \Sigma^\omega$ の原子的広義公平性成分 $\overline{\mathit{Fairness}}(\{\sigma\})$ から生成される前順序商部分集合 $(\overline{\mathit{Fairness}}(\{\sigma\})/{\sim^{\mathcal{R}}}, \precsim^{\mathcal{R}})$ は上に非有界な極大下半束を成す．そして，σ が循環的な接尾辞を持つ場合は同値類 $\mathit{Suff}_\omega(\{\sigma\})$ を下限として持ち，持たない場合は下にも非有界となる．

5.2 対偶空間

逆対称性からは対偶安全性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$ は開集合系にしかならないと予想されるが，定理 12 より安定性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ が開集合系の条件を満たすことから，その補類である対偶安全性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$ を閉集合系として扱うことができる．よって，対偶安全性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$ を基に，標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$ と「対偶」の位相空間が生成できる（図 3）．

定理 16 (対偶空間) 対偶安全性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$ を閉集合系とする位相空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{CR}} = (\Sigma^\omega, \mathcal{S}^{\mathcal{CR}})$ は以下の位相的性質を持つ．

(i) 不完全
(ii) 非連結かつ非完全不連結
(iii) 非 Lindelöf（⇒ 非コンパクト）
(iv) 非 Kolmogorov かつ非対称的（⇒ 距離化不能）
(v) Alexandroff

証明 16 (定理 16 の証明) (i): 語 $a^\omega \in \Sigma^\omega$ について，a^ω を含む最小の開集合は $\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(\{a^\omega\}) = \{a^\omega\}$ であるため，孤立点が存在する．よって，完全（perfect）ではない．

(ii)–(v): 定理 13 の証明 (ii)–(v) と同様である． □

対偶空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}$ は，逆空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ とほぼ同じ位相的性質をもつが，完全性（perfectness）のみ異なる．また，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}$ は $\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}$ において閉包演算に相当しており，稠密集合系 $\mathcal{D}^{\mathcal{CR}}$ は

$$\mathcal{D}^{\mathcal{CR}} = \{P \subseteq \Sigma^\omega \mid \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P) = \Sigma^\omega\} \tag{63}$$

である．式 (54) により $\mathcal{D}^{\mathcal{CR}}$ はある程度予想でき，少なくとも以下の逆活性族 $\mathcal{D}_1^{\mathcal{CR}}$ を含む．

命題 5 有限長言語 $W_P(\sigma) = \{s \in \Sigma^* \mid s\sigma \in P\}$ を時間的性質 $P \subseteq \Sigma^\omega$ 及び語 $\sigma \in \Sigma^\omega$ に対する弱い良性接頭辞の集合とする．このとき，逆活性族

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1^{\mathcal{CR}} = \{P \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}} \mid \forall \sigma \in \Sigma^\omega. \exists \sigma' \in \mathit{suff}(\sigma).\\ \Sigma^* W_P(\sigma') = \Sigma^*\}\end{aligned} \tag{64}$$

に関して，以下が成り立つ．

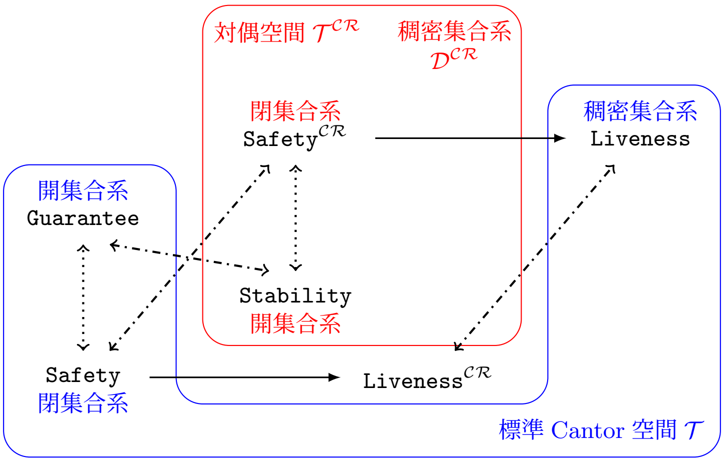

図 3　対偶空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}$（赤字）vs. 標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$（青字）．なお，点線両矢印は補関係，鎖線両矢印は対偶関係，実線三角矢印は $\{\Sigma^\omega, \emptyset\}$ を除いた上での真包含関係 $\subset$ である．

$$\mathcal{D}_1^{\mathcal{CR}} \subseteq \mathcal{D}^{\mathcal{CR}}, \tag{65}$$
$$\mathcal{L}^{\mathcal{R}} \not\subseteq \mathcal{D}^{\mathcal{CR}} \not\subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{R}}. \tag{66}$$

証明 17 (命題 5 の証明) 任意の逆活性 $P \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}$ について，逆活性の定義より，任意の接尾辞 $\sigma \in \Sigma^\omega$ に対して $W_P(\sigma)$ は非空であるため，$P = \bigcup_{\sigma\in\Sigma^\omega} W_P(\sigma)\sigma$ である．式 (64) より，$P \in \mathcal{D}_1^{\mathcal{CR}}$ ならば，

$$\begin{aligned}\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P) &= \Sigma^* P = \Sigma^* \bigcup_{\sigma\in\Sigma^\omega} W_P(\sigma)\sigma \\ &= \bigcup_{\sigma\in\Sigma^\omega} \Sigma^* W_P(\sigma)\sigma \\ &= \bigcup_{\sigma\in\Sigma^\omega} \Sigma^*\sigma = \Sigma^\omega,\end{aligned} \tag{67}$$

即ち，P は稠密集合である．以上により，式 (65) が成り立つ．

また，逆活性 $a\Sigma^\omega \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}$ について，$\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(a\Sigma^\omega) = \Sigma^* a\Sigma^\omega \subset \Sigma^\omega$，即ち，稠密集合でない逆活性が存在する．さらに，語 $ab^\omega \in \Sigma^\omega$ に対して，時間的性質 $P' = \{b^\omega\} \cup \Sigma^*\{ab^\omega\}^{-1}$ を考える．この P' について，

$$\begin{aligned}\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(P') &= \Sigma^*\sigma \cup \Sigma^*\{ab^\omega\}^{-1} \\ &\supseteq \Sigma^* ab^\omega \cup \Sigma^*\{ab^\omega\}^{-1} = \Sigma^\omega\end{aligned} \tag{68}$$

であるため，P' は稠密集合である．そして，明らかに $ab^\omega \notin \Sigma^*\{ab^\omega\}^{-1}$ である．つまり，P' は接尾辞 ab^ω に対する弱い良性接頭辞をもたない．即ち，逆活性でない稠密集合が存在する．以上により，式 (66) が成り立つ．　□

なお，任意の $P \subseteq \Sigma^\omega$ から生成される時間的性質 $P \cup \Sigma^* P^{-1}$ は，$\sigma \in P$ に対して $W_P(\sigma) = \{\varepsilon\}$ かつ $\sigma \notin P$ に対して $W_P(\sigma) = \Sigma^*$ であるため，$\mathcal{D}_1^{\mathcal{CR}}$ に属す．また，接頭強依存性 $a\Sigma^\omega \cup \Sigma a\Sigma^\omega$ は稠密集合ではないが，同じ接頭強依存性 $a\Sigma^\omega \cup \Sigma(\Sigma\setminus\{a\})\Sigma^\omega$ は稠密集合である．この 2 つの時間的性質は活性類やその補・逆・対偶類及びその和・積等だけでなく安全性類等を含め本稿で扱っている時間的性質類とその合成類では区別できない．従って，稠密集合系 $\mathcal{D}^{\mathcal{CR}}$ はそれらの時間的性質類とは一致し得ないと言える．そのため，$\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}$ の閉集合系及び開集合系は $\mathcal{T}$ の閉集合系及び開集合系それぞれの対偶類であるが，稠密集合系は対偶関係にはない（図 3）．

また，逆空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ と同様に，対偶空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}$ も Alexandroff であるため，特殊化前順序 $\precsim^{\mathcal{CR}}$ から生成される前順序集合 $(\Sigma^\omega, \precsim^{\mathcal{CR}})$ と自然に 1 対 1 対応する．

$$\sigma_1 \precsim^{\mathcal{CR}} \sigma_2 \Leftrightarrow \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(\{\sigma_1\}) \subseteq \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(\{\sigma_2\}) \tag{69}$$

ここで，

$$\sigma_1 \precsim^{\mathcal{CR}} \sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_2 \precsim^{\mathcal{R}} \sigma_1 \tag{70}$$

であるため，$\precsim^{\mathcal{CR}}$ は $\precsim^{\mathcal{R}}$ の逆順序であり，$\precsim^{\mathcal{CR}}$ から導出される同値関係（識別不能関係）$\sim^{\mathcal{RC}}$ と $\sim^{\mathcal{R}}$ は一致する．同値関係 $\sim^{\mathcal{CR}}$ を用いることで，対偶空間の商位相空間が生成できる．

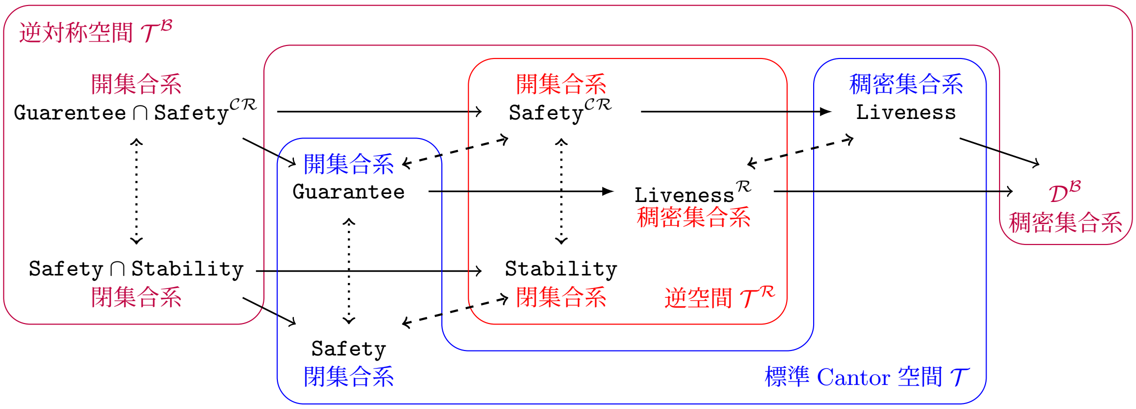

図 4 逆対称空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{B}}$（紫字）vs. 標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$（青字）・逆空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$（赤字）．なお，点線両矢印 は補関係，破線両矢印 は逆関係，実線矢印 $\rightarrow$ は素朴な真包含関係 $\subset$，実線三角矢印 は $\{\Sigma^\omega, \emptyset\}$ を除いた上での真包含関係である．

定理 17 (商対偶空間) 対偶空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}$ の商位相空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}/\sim^{\mathcal{CR}} = (\Sigma^\omega/\sim^{\mathcal{CR}}, \mathcal{S}^{\mathcal{CR}}/\sim^{\mathcal{CR}})$ は以下の位相的性質を持つ．

(i) 不完全

(ii) 非連結かつ非完全不連結

(iii) 非 Lindelöf（⇒ 非コンパクト）

(iv) Kolmogorov かつ非対称的 （⇒ 距離化不能）

(v) Alexandroff

証明 18 (定理 17 の証明) (i)–(iii) 及び (v): 定理 16 の証明 (i)–(iii) 及び (v) と同様である．

(iv): 2 語 $ab^\omega, b^\omega \in \Sigma^\omega/\sim^{\mathcal{CR}}$ について，$ab^\omega \prec^{\mathcal{CR}} b^\omega$ であるため，$\precsim^{\mathcal{CR}}$ は対称律を満たさない．従って，$\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}/\sim^{\mathcal{CR}}$ は Kolmogorov だが対称的（R_0）ではない． □

なお，$\precsim^{\mathcal{CR}}$ は $\precsim^{\mathcal{R}}$ の逆順序であるため，任意の語 $\sigma \in \Sigma^\omega$ の原子的広義公平性成分 $\overline{Fairness}(\{\sigma\})$ から生成される前順序商部分集合 $(\overline{Fairness}(\{\sigma\})/\sim^{\mathcal{CR}}, \precsim^{\mathcal{CR}})$ は下に非有界な極大上半束を成す．また，σ が循環的な接尾辞を持つ場合は同値類 $Suff_\omega(\{\sigma\})$ を上限として持ち，持たない場合は上にも非有界となる．

5.3 逆対称空間

安全性類 $\mathcal{S}$ と安定性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ はどちらも閉集合系として扱えるため，逆対称類である双安全性類 $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ を基に「逆対称」な位相空間を生成できる（図 4）．

定理 18 (逆対称空間) 双安定性類 $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ を閉集合系とする位相空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{B}} = (\Sigma^\omega, \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{R}})$ は以下の位相的性質を持つ．

(i) 完全

(ii) 連結

(iii) コンパクト

(iv) 非 Kolmogorov かつ非対称的（⇒ 距離化不能）

証明 19 (定理 18 の証明) (i): 任意の語 $\sigma \in \Sigma^\omega$ について，σ を含む開集合はある接頭辞 $s \in pref(\sigma)$ と接尾辞 $\sigma' \in suff(\sigma)$ を持つ語の集合 $s\Sigma^*\sigma'$ を部分として持つため，孤立点が存在しない．よって，完全（perfect）である．

(ii): 式 (15) より，開かつ閉集合は自明なものしか存在しない．従って，$\mathcal{T}^{\mathcal{B}}$ は連結である．

(iii): $\mathcal{T}^{\mathcal{B}}$ の開集合族 $\mathcal{O} = \{O_\lambda \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{CR}} \mid \lambda \in \Lambda\}$ が Σ^ω の開被覆であるとする．このとき，任意の $\lambda \in \Lambda$ について $O_\lambda \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$ であり，標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$ がコンパクトであるため，ある $\Lambda' \subseteq \Lambda$ が存在し，$\mathcal{O}$ の有限部分被覆 $\mathcal{O}' = \{O_\lambda \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{CR}} \mid \lambda \in \Lambda'\}$ が存在する．この $\mathcal{O}'$ は $\mathcal{T}^{\mathcal{B}}$ においても有限部分被覆であるため，$\mathcal{T}^{\mathcal{B}}$ はコンパクトである．

(iv): 定理 13 の証明 (iii) と同様に，2 つの語 $(ab)^\omega, (ba)^\omega \in \Sigma^\omega$ を考える．ここで，$(ab)^\omega$ を含む開集合は，$\Sigma^* a\Sigma^\omega$，$\Sigma^* b\Sigma^\omega$，$\Sigma^*(ab)^n\Sigma^\omega$，$\Sigma^*(ba)^n\Sigma^\omega$，

$\Sigma^*(ab)^n a\Sigma^\omega$，$\Sigma^*(ba)^n b\Sigma^\omega$（ただし，$n \in \mathbb{N}_{>0}$）のいずれかを部分集合として含む．これらの集合は $(ba)^\omega$ を必ず要素として持つため，2 つの語 $(ab)^\omega$ と $(ba)^\omega$ を識別する開集合（保証性かつ対偶安全性）は存在しない．従って，$\mathcal{T}^\mathcal{B}$ は Kolmogorov ではなく，対称的（R_0）でもない． □

逆対称空間 $\mathcal{T}^\mathcal{B}$ は，標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$ と同じコンパクト性，逆空間 $\mathcal{T}^\mathcal{R}$ と同じ分離性，両空間と同じ完全性（perfectness），両空間と異なる連結性をもつ．また，$\overline{Bisafety}$ は $\mathcal{T}^\mathcal{B}$ において閉包演算に相当しており，稠密集合系

$$\mathcal{D}^\mathcal{B} = \{P \subseteq \Sigma^\omega \mid Bisafey(P) = \Sigma^\omega\} \tag{71}$$

に関して，少なくとも以下の命題は成り立つ．

命題 6
$$\mathcal{L} \cup \mathcal{L}^\mathcal{R} \subset \mathcal{D}^\mathcal{B}. \tag{72}$$

証明 20 (命題 6 の証明) 命題 3，定理 5 と定理 14 より，$\mathcal{L} \cup \mathcal{L}^\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}^\mathcal{B}$ は明らか．

また，非活性かつ非逆活性 $a\Sigma^* a^\omega \subseteq \Sigma^\omega$ に関して，

$$\overline{Safety}(a\Sigma^* a^\omega) = a\Sigma^\omega,$$
$$\overline{Safety}^\mathcal{R}(a\Sigma^* a^\omega) = \Sigma^* a^\omega,$$
$$\overline{Bisafety}(a\Sigma^* a^\omega) = \overline{Safety}^\mathcal{R}(a\Sigma^\omega) = \Sigma^\omega$$

であるため，$\mathcal{L} \cup \mathcal{L}^\mathcal{R} \neq \mathcal{D}^\mathcal{B}$ が成り立つ．

以上により，式 (72) が成り立つ． □

従って，定理 2 より，$\mathcal{T}^\mathcal{B}$ 上ではすべての非自明な開集合は稠密である．さらに定理 10 より，非対偶活性/活性と非罹患性/逆活性の積から生成される類が $\mathcal{D}^\mathcal{B}$ に一致するまたは含まれると予想できる．この予想に関して以下の命題が成り立つ．つまり，定理 10 の双安全性-双活性積分解可能性は位相的観点からも裏付けられる．

命題 7 2 つの時間的性質族

$$\mathcal{D}_1^\mathcal{B} = \{P_1 \cap P_2 \subseteq \Sigma^\omega \mid P_1 \notin \mathcal{L}^{\mathcal{C}\mathcal{R}}, P_2 \notin \mathcal{L}^\mathcal{C}, P_1 \cap P_2 \neq \emptyset\}, \tag{73}$$
$$\mathcal{P}_1 = \{P_1 \cap P_2 \subseteq \Sigma^\omega \mid P_1 \in \mathcal{L}, P_2 \in \mathcal{L}^\mathcal{R}, P_1 \cap P_2 \neq \emptyset\} \tag{74}$$

に関して，以下が成り立つ．

$$\mathcal{D}_1^\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}^\mathcal{B}, \tag{75}$$
$$\mathcal{P}_1 \not\subseteq \mathcal{D}^\mathcal{B}. \tag{76}$$

証明 21 (命題 7 の証明) 任意の非対偶活性 $P_1 \notin \mathcal{L}^{\mathcal{C}\mathcal{R}}$ に関して，定義より，ある強い良性接尾辞 $\sigma \in \Sigma^\omega$ が存在する．同様に，任意の非罹患性（非補活性）$P_2 \notin \mathcal{L}^\mathcal{C}$ に関して，定義より，ある強い良性接頭辞 $s \in \Sigma^*$ が存在する．従って，$P_1 \cap P_2 \in \mathcal{D}_1^\mathcal{B}$ について，$s\Sigma^*\sigma \subseteq P_1 \cap P_2$ である．よって，

$$\overline{Bisafety}(P_1 \cap P_2) \supseteq \overline{Bisafety}(s\Sigma^*\sigma) = \Sigma^\omega, \tag{77}$$

即ち，$\mathcal{D}_1^\mathcal{B}$ の任意の要素は稠密集合である．以上により，式 (75) が成り立つ．

活性（かつ逆活性）$P_1' = (a\Sigma^* a^\omega) \cup ((\Sigma \setminus \{a\})\Sigma^*((\Sigma \setminus \{a\})\Sigma^*)^\omega) \cup b^\omega \in \mathcal{L}$ と逆活性（かつ活性）$P_2' = ((\Sigma \setminus \{a\})\Sigma^* a^\omega) \cup (a\Sigma^*((\Sigma \setminus \{a\})\Sigma^*)^\omega) \cup b^\omega \in \mathcal{L}^\mathcal{R}$ に関して，$P_1' \cap P_2' = \{b^\omega\} \neq \emptyset$ であるため，$P_1' \cap P_2' \in \mathcal{P}_1$ である．そして，$\overline{Bisafety}(P_1' \cap P_2') = \{b^\omega\} \subset \Sigma^\omega$ である．即ち，$P_1' \cap P_2'$ は稠密集合ではない．以上により，式 (76) が成り立つ． □

以上のように，$\mathcal{D}^\mathcal{B}$ が元の $\mathcal{T}$ 及び $\mathcal{T}^\mathcal{R}$ の稠密集合類の和合成類より真に大きいが，どの程度大きいかは未解決である（図 4）．

そして，逆対称空間 $\mathcal{T}^\mathcal{B}$ 上の特殊化前順序 $\precsim^\mathcal{B}$ からから導出される同値関係 $\sim^\mathcal{B}$ は $\mathcal{T}^\mathcal{B}$ 上での識別不能関係に相当する．

$$\sigma_1 \precsim^\mathcal{B} \sigma_2 \Leftrightarrow \overline{Bisafety}(\{\sigma_1\}) \subseteq \overline{Bisafety}(\{\sigma_2\}). \tag{78}$$

ここで，2 つの前順序関係 $\precsim^\mathcal{B}$ と $\precsim^\mathcal{R}$ に関して少なくとも以下の関係が成り立つ．

$$\sigma_1 \precsim^\mathcal{R} \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 \precsim^\mathcal{B} \sigma_2. \tag{79}$$

そして，同値関係 $\sim^\mathcal{B}$ を用いることで，逆対称空間の商位相空間が生成できる．

定理 19 (商逆対称空間) 逆対称空間 $\mathcal{T}^\mathcal{B}$ の商位相空間 $\mathcal{T}^\mathcal{B}/{\sim^\mathcal{B}} = (\Sigma^\omega/{\sim^\mathcal{B}}, (\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^\mathcal{R})/{\sim^\mathcal{B}})$ は以下の位相的性質を持つ．

(i) 完全
(ii) 連結
(iii) コンパクト
(iv) Kolmogorov かつ非対称的（⇒ 距離化不能）

証明 22 (定理 19 の証明) (i): 定理 18 の証明 (i) と同様である．

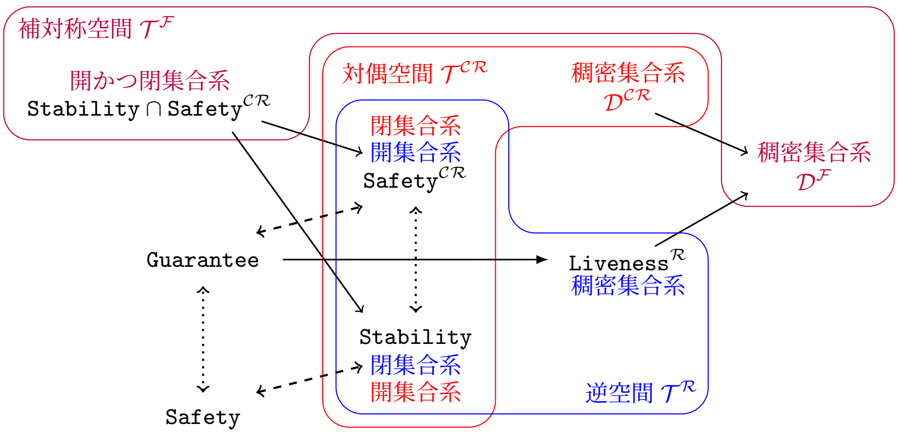

図 5　補対称空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}$（紫字）vs. 逆空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$（青字）・対偶空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}$（赤字）．なお，点線両矢印 $\leftarrow\cdots\rightarrow$ は補関係，破線両矢印 $\leftarrow\text{-}\text{-}\rightarrow$ は逆関係，実線矢印 $\rightarrow$ は素朴な真包含関係 $\subset$，実線三角矢印 $\blacktriangleright$ は $\{\Sigma^{\omega}, \emptyset\}$ を除いた上での真包含関係である．

(ii) 及び (iii): 元の位相空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{B}}$ が連結かつコンパクトであるため，商位相空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{B}}/{\sim^{\mathcal{B}}}$ も連結かつコンパクトである．

(iv): 2 語 $ab^{\omega}, b^{\omega} \in \Sigma^{\omega}/{\sim^{\mathcal{B}}}$ について，$b^{\omega} \prec^{\mathcal{B}} ab^{\omega}$ であるため，$\precsim^{\mathcal{B}}$ は対称律を満たさない．従って，$\mathcal{T}^{\mathcal{B}}/{\sim^{\mathcal{B}}}$ は Kolmogorov だが対称的（R_0）ではない． □

即ち，商逆対称空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{B}}/{\sim^{\mathcal{B}}}$ は位相空間論的な意味では対称的ではない．

5.4　補対称空間

定理 12 より，安定性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ と対偶安全性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$ は，一方を閉集合系としてみたとき，他方は開集合系となる．そのため，補対称類である広義公平性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$ は開かつ閉集合系として扱うことができる．

系 2 広義公平性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$ は開かつ閉集合系の条件を満たす．

証明 23 (系 2 の証明) 定理 12 より明らか． □

よって，補対称類である広義公平性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$ を基に「補対称」な位相空間が生成できる（図 5）．

定理 20 (補対称空間) 広義公平性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$ を閉集合系とする位相空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{F}} = (\Sigma^{\omega}, \mathcal{S}^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{CR}})$ は以下の位相的性質を持つ．

(i)　完全

(ii)　非連結かつ非完全不連結

(iii)　非 Lindelöf（$\Rightarrow$ 非コンパクト）

(iv)　非 Kolmogorov かつ対称的（$\Rightarrow$ 距離化不能）

(v)　局所密着

証明 24 (定理 20 の証明) (i): 任意の語 $\sigma \in \Sigma^{\omega}$ について，σ を含む最小の開（かつ閉）集合は $\overline{\mathit{Fairness}}(\{\sigma\})$ であるため，孤立点が存在しない．よって，完全（perfect）である．

(ii) 及び (iii): 連結性，コンパクト性と非 Kolmogorov 性については，定理 13 の証明と同様である．

(iii): 非 Kolmogorov 性については定理 13 の証明と同様である．また，局所密着ならば Alexandroff でもあるため，$\mathcal{T}^{\mathcal{F}}$ は特殊化前順序 $\precsim^{\mathcal{F}}$ から生成される前順序集合 $(\Sigma^{\omega}, \precsim^{\mathcal{F}})$ と自然に 1 対 1 対応する．

$$\sigma_1 \precsim^{\mathcal{F}} \sigma_2 \Leftrightarrow \overline{\mathit{Fairness}}(\{\sigma_1\}) \subseteq \overline{\mathit{Fairness}}(\{\sigma_2\}) \tag{80}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\sigma_1 \precsim^{\mathcal{F}} \sigma_2 &\Rightarrow \mathit{suff}(\sigma_1) \cap \mathit{suff}(\sigma_2) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \sigma_2 \precsim^{\mathcal{F}} \sigma_1\end{aligned} \tag{81}$$

であるため，$\precsim^{\mathcal{F}}$ は対称律を満たし，同値関係（識別不能関係）$\sim^{\mathcal{F}}$ と一致する．従って，$\mathcal{T}^{\mathcal{F}}$ は対称的（R_0）である．

(v): 系 2 より明らか． □

補対称空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}$ は，逆空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ と対偶空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}$ とほぼ同様の位相的性質をもつが，対称的 R_0 である点が両空間と異なる．また，$\overline{\mathit{Fairness}}$ は $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}$ において閉包演算に相当しており，稠密集合系

$$\mathcal{D}^{\mathcal{F}} = \{P \subseteq \Sigma^\omega \mid \overline{\mathit{Fairness}}(P) = \Sigma^\omega\} \tag{82}$$

に関して，逆対称空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{B}}$ と同様に，少なくとも以下の命題が成り立つ．

命題 8

$$\mathcal{L}^{\mathcal{R}} \cup \mathcal{D}^{\mathcal{CR}} \subset \mathcal{D}^{\mathcal{F}}. \tag{83}$$

証明 25 (命題 8 の証明) 定理 7，定理 14 と式 (63) より $\mathcal{L}^{\mathcal{R}} \cup \mathcal{D}^{\mathcal{CR}} \subseteq \mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ は明らか．

また，時間的性質 $ba^\omega \cup \Sigma^*(\Sigma^\omega \setminus \{a^\omega\})$ に関して，

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{R}}(ba^\omega \cup \Sigma^*(\Sigma^\omega \setminus \{a^\omega\})) \\
&\quad = \{ba^\omega, a^\omega\} \cup \Sigma^*(\Sigma^\omega \setminus \{a^\omega\})), \\
&\overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(ba^\omega \cup \Sigma^*(\Sigma^\omega \setminus \{a^\omega\})) \\
&\quad = \Sigma^* ba^\omega \cup \Sigma^*(\Sigma^\omega \setminus \{a^\omega\})), \\
&\overline{\mathit{Fairness}}(ba^\omega \cup \Sigma^*(\Sigma^\omega \setminus \{a^\omega\})) \\
&\quad = \overline{\mathit{Safety}}^{\mathcal{CR}}(\{ba^\omega, a^\omega\} \cup \Sigma^*(\Sigma^\omega \setminus \{a^\omega\}))) \\
&\quad = \Sigma^* a^\omega \cup \Sigma^*(\Sigma^\omega \setminus \{a^\omega\})) = \Sigma^\omega
\end{aligned}$$

であるため，$\mathcal{L}^{\mathcal{R}} \cup \mathcal{D}^{\mathcal{CR}} \neq \mathcal{D}^{\mathcal{B}}$ が成り立つ．

以上により，式 (83) が成り立つ． □

式 (56) より，逆対称空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{B}}$ の稠密集合系 $\mathcal{D}^{\mathcal{B}}$ と同様に，非罹患性と $\mathcal{D}^{\mathcal{CR}}$ の要素の積から生成される類が $\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ と一致するあるいは含まれると予想できる．しかし，式 (36) が示す非対称性もあり，$\mathcal{D}^{\mathcal{F}}$ がどの程度大きいかは未解決である（図 5）．ただし，定理 11 の条件付き広義公平性-活性積分解可能性は位相的観点からも裏付けられる．補対称類である広義公平性（安定性かつ対偶安全性）の補集合はやはり広義公平性であるため，$\overline{\mathit{Fairness}}(P) \neq \Sigma^\omega$ ならば，式 (15) より，

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathit{Safety}}(P \cup (\overline{\mathit{Fairness}}(P))^{-1}) \\
&\qquad \supseteq \overline{\mathit{Safety}}((\overline{\mathit{Fairness}}(P))^{-1}) = \Sigma^\omega,
\end{aligned} \tag{84}$$

即ち，$P \cup (\overline{\mathit{Fairness}}(P))^{-1}$ は標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$ 上で稠密集合である．

そして，逆空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ 及び対偶空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}$ とは異なり，$\precsim^{\mathcal{F}}$ は同値関係 $\sim^{\mathcal{F}}$ と一致するため，$\mathcal{T}^{\mathcal{F}}$ は位相空間論的な意味でも対称的である．そして，任意の語 $\sigma \in \Sigma^\omega$ の原子的広義公平性成分 $\overline{\mathit{Fairness}}(\{\sigma\})$ は $(\Sigma^\omega, \precsim^{\mathcal{F}})$ 上の同値類を成す．この同値関係 $\sim^{\mathcal{F}}$ を用いることで，補対称空間の商位相空間を生成できる．

定理 21 (商補対称空間) 補対称空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}$ の商位相空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}/{\sim^{\mathcal{F}}} = (\Sigma^\omega/{\sim^{\mathcal{F}}}, (\mathcal{S}^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S}^{\mathcal{CR}})/{\sim^{\mathcal{F}}})$ は以下の位相的性質を持つ．

(i) 不完全

(ii) 完全不連結

(iii) 非 Lindelöf（⇒ 非コンパクト）

(iv) 距離化可能

(v) 離散

証明 26 (定理 21 の証明) (i): (v) より，明らかに全ての点が孤立点であり，完全（perfect）ではない．

(ii) 及び (iii): 語の全体集合 Σ^ω は非可算集合（連続体濃度），任意の語 $\sigma \in \Sigma^\omega$ の原子的広義公平性成分 $\overline{\mathit{Fairness}}(\{\sigma\})$ は可算集合であるため，台集合 $\Sigma^\omega/{\sim^{\mathcal{F}}}$ は非可算集合（連続体濃度）である．また，(v) より，$\mathcal{T}^{\mathcal{F}}/{\sim^{\mathcal{F}}}$ は完全不連結であり，Lindelöf ではない．

(iv): (v) より，明らかに離散距離を与えることが可能である．

(v): 同値関係 $\sim^{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}$ の非自明なものの内の極小な閉集合（かつ開集合）の各要素を同値にする関係である．従って，$\mathcal{T}^{\mathcal{F}}/{\sim^{\mathcal{F}}}$ は離散である． □

即ち，商補対称空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{F}}/{\sim^{\mathcal{F}}}$ は任意の連続体濃度離散空間と同相である．

6 考察

本章では，位相的特徴付け及び位相的性質の意義，逆類の存在性，応用可能性について考察する．

6.1 位相的特徴付けの意義

これまで位相的特徴付けが与えられていた時間的性質類は，安全性及び保証性（補安全性）をそれぞれ閉集合系及び開集合系とする標準 Cantor 空間の Borel 階層 [8] [9] [6] に基づくものであった．5 章では，位相的特徴付けが与えられていなかった安定性類 [14]（逆安全性類），絶対活性類 [1] [14]（対偶安全性類から恒

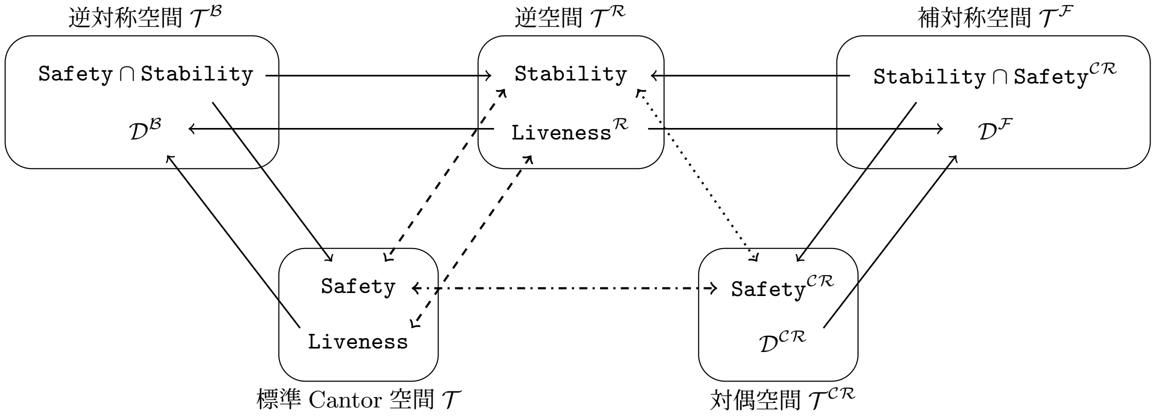

図 6　各位相空間の閉集合系及び稠密集合系の関係．なお，点線両矢印 $\leftarrow\cdot\rightarrow$ は補関係，破線両矢印 $\leftarrow\rightarrow$ は逆関係，鎖線両矢印 $\leftarrow\cdot\rightarrow$ は対偶関係，実線矢印 $\rightarrow$ は真包含関係 $\subset$ である．

偽 $\emptyset$ を除いた時間的性質類）及び公平性類 [14]（広義公平性類から恒偽 $\emptyset$ を除いた時間的性質類）並びに新たに定義した双安全性類（安全かつ安定な時間的性質類）について，新たに位相的特徴付けを与えた．この位相的特徴付けには，汎用的に用いられる補関係だけでなく，時間的性質類間にしばしば暗に現れる逆関係を基づく時間的性質類及びそれにより生成される非 Cantor 空間を用いた（図 6）．

これにより，位相的な裏付けをもった成分構成及び積分解それぞれ 4 種を得ることができた．また，本研究は，これまで標準的に扱われてきた Cantor 空間以外の位相空間も時間的性質類の特徴付けにおいて重要な役割を果たしうることを示した．本稿で取り扱っていない時間的性質類に対する類似の位相的特徴付けにより，さらに別種の成分構成や積分解が発見される可能性がある．

6.2　非対称性

逆空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ の稠密集合系は標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$ の稠密集合系と逆関係にあるが，対偶空間 $\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}$ の稠密集合系は対偶関係にはならない（図 6）．対偶関係と対応しないこの分解可能性は，やはり接頭辞（有限長語）と接尾辞（無限長語）の構造の非対称性に由来するものと考えられる．接頭辞・接尾辞の構造的非対称性より，安定性類/対偶安全性類には「接頭辞の除去/追加に関して閉じている」[14] という安全性類/保証性類にはない特徴がある．保証性類が他の時間的性質と積合成の対にはならない一方で，対偶安定性類が（特異なものとは言え）ある時間的性質類と積合成の対を成せるということは，ある意味での対偶安全性類（やその補類である安定性類，それらの合成類である広義公平性類）の扱い易さを示唆している．実際，それらの時間的性質類には関しては，安全性類や双安全性類とは異なり，下方成分に基づく下方近似が可能である．

6.3　位相的性質の意義

5 章では，成分構成可能な時間的性質類（安全性の除く.）を閉集合系として生成される位相空間及びその商位相空間の連結性，コンパクト性，分離性などについても明らかにした（表 1）．しかし，これらの位相的性質は，現在の形式検証の技術的基盤においては，特に意義を持たないものと考えられる．

現在の形式検証の技術的基盤は形式言語理論やオートマトン理論であるが，その中で基礎的な言語クラスである ω-正規言語（及びそれと対応する有限状態 ω-オートマトン）は和・積・補演算に関して有限個の場合にのみ閉じている．一方で，位相空間は任意個の和/積に関して閉じている開集合系/閉集合系を基礎としている．ここに大きな溝があり，現在の形式検証で利用されている時間的性質分類 [8] [17] [9]，成分構成 [2] 及び積分解 [1] は，位相空間上で成立するより一般

表 1　各位相空間（上）及びその商位相空間（下）の位相的性質

<table>
<tr><th>位相空間</th><th>$\mathcal{T}$</th><th>$\mathcal{T}^{\mathcal{B}}$</th><th>$\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$</th><th>$\mathcal{T}^{\mathcal{F}}$</th><th>$\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}$</th></tr>
<tr><td rowspan="7">位相的性質</td><td colspan="4">完全</td><td>不完全</td></tr>
<tr><td>完全不連結</td><td>連結</td><td colspan="3">非連結
非完全不連結</td></tr>
<tr><td colspan="2">コンパクト</td><td colspan="3">非 Lindelöf</td></tr>
<tr><td rowspan="2">距離化可能</td><td colspan="4">非 Kolmogorov</td></tr>
<tr><td colspan="2">非対称的</td><td>対称的</td><td>非対称的</td></tr>
<tr><td colspan="2">非 Alexandroff</td><td>Alexandroff</td><td>局所密着</td><td>Alexandroff</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>商位相空間</th><th>$\mathcal{T}$</th><th>$\mathcal{T}^{\mathcal{B}}/{\sim^{\mathcal{B}}}$</th><th>$\mathcal{T}^{\mathcal{R}}/{\sim^{\mathcal{R}}}$</th><th>$\mathcal{T}^{\mathcal{F}}/{\sim^{\mathcal{F}}}$</th><th>$\mathcal{T}^{\mathcal{CR}}/{\sim^{\mathcal{CR}}}$</th></tr>
<tr><td rowspan="5">位相的性質</td><td colspan="3">完全</td><td colspan="2">不完全</td></tr>
<tr><td>完全不連結</td><td>連結</td><td>非連結
非完全不連結</td><td>完全不連結</td><td>非連結
非完全不連結</td></tr>
<tr><td colspan="2">コンパクト</td><td colspan="3">非 Lindelöf</td></tr>
<tr><td>距離化可能</td><td colspan="2">Kolmogorov
非対称的</td><td>距離化可能</td><td>Kolmogorov
非対称的</td></tr>
<tr><td colspan="2">非 Alexandroff</td><td>Alexandroff</td><td>離散</td><td>Alexandroff</td></tr>
</table>

的な時間的性質分類，閉包及び積分解をそれぞれ特殊化しているに過ぎない．また，時間的性質分類，成分構成及び積分解は，4.2 節で示した 4 種の積分解可能性も含め，開集合系，閉集合系，稠密集合系及びそれらの和・積等だけで説明される．著者の知る限り，時間的性質類のオートマトン的/時間論理的な観点での扱い易さ等がその時間的性質類によって特徴付けられる空間の位相的性質（連結性，コンパクト性，分離性など）によって説明されたことはなく，位相的性質に基づいた検証アルゴリズム/技法も存在しない．

ただし，位相的性質を利用した新しい形式検証技術体系を構築できる余地はある．例えば，表 1 から安直な予想をするならば，コンパクトな位相空間を生成する開集合系又は閉集合系に属す時間的性質であれば安全オートマトンと同程度の扱い易さを持った何らかの形式として取り扱うことができるかもしれない．

なお，標準 Cantor 空間 $\mathcal{T}$ の同値類はすべて単集合であるため，商位相空間は $\mathcal{T}$ 自身である．また，閉集合系として扱える安全性類 $\mathcal{S}$ と対偶安全性類 $\mathcal{S}^{\mathcal{CR}}$ の積を基に生成される位相空間 $(\Sigma^\omega, \mathcal{S}\cap\mathcal{S}^{\mathcal{CR}})$ は，式 (14) より，密着空間にしかならない．そして，本研究では具体的な位相空間しか取り扱っていないため，閉集合系（又は開集合系）が補・逆・対偶関係にある位相空間間の一般的関係性についてはほとんどが不明である．

6.4　逆類の存在性

本稿では，議論を簡潔にするため，接頭辞/接尾辞の限量に基づいて定義され，逆類を定義可能な二分型時間的性質類のみに注目した．しかし，一般的には，二分された接頭辞/接尾辞の限量のみに基づかない時間的性質類も存在する．例えば，監視可能性 [3] [10] は接頭部分がさらに前後半の 2 つに分かれており，三分型と分類できる時間的性質類として形式的には定義されている．ただし，監視可能性に対しては，接頭辞前半の限量と接尾辞の限量を入れ替えることで逆類を与えることは可能である．同様に，接頭辞/接尾辞をさらに細かく分割して定義される n 分型時間的性質類に対しても，定義 16 を一般化することで逆類を定義することはできる．

6.5 応用可能性

最後に，本研究で示した時間的性質類の成分構成及び分解可能性の形式検証への応用に向け，想定される主な利用方法である時間的性質の近似及び技術的困難性について述べる．

6.5.1 時間的性質の近似

4.1 節で示した上方成分群は，元の時間的性質の特徴の一部を保持した上方近似としても解釈できる．そのため，この種の近似を利用した近似的検証に利用可能である．即ち，システムが上方成分を充足しないなら，元の時間的性質も充足しない．また，リアクティブシステム仕様の実現可能性判定/自動合成 [11] [13] [15] においては，各上方成分に対する実現可能性判定/自動合成は，元の時間的性質の実現可能性必要条件充足判定/不完全合成に相当する．そして，上方安定性成分，上方対偶安全性成分及び上方広義公平性成分は接尾辞に係る制約を保持しているため，それら上方成分が実現不能である場合，リアクティブシステム仕様の内で接尾辞に係る制約に欠陥があることがわかる [15].

さらに，下方安定性成分，下方対偶安全性成分及び下方広義公平性成分を利用した近似的検証も可能である．即ち，システムが下方成分を充足するなら，元の時間的性質も充足する．なお，形式検証において検査する時間的性質には悪性接頭辞が存在する場合も多い．そのような場合は下方対偶安全性成分及び下方広義公平性成分は空となり，意味のある成分を抽出できない．ただし，非自明な広義公平性の仮定を置く場合には悪性接頭辞が存在しないため，有効な成分抽出が見込める．また，元の時間的性質が初期状態に関する制約を含む場合，下方安定性成分ではその初期状態制約が永続化される．つまり，下方成分が与える近似は極端なものになる場合がある．これは下方安全性近似の扱い易さとは対照的である．下方安全性成分は一般には定まらないが，元の時間的性質に任意に近い安全性を構成でき [13]，漸近的近似検証が可能である．一方で，安定性，対偶安全性及び広義公平性は，下方成分が一意に定まるが故に，そのような漸近的近似検証ができない．

6.5.2 技術的困難

形式検証で用いる時間的性質は，ほとんどの場合で ω-正規であり，しばしば ω-オートマトンへ変換して取り扱う．安全性成分及び双安全性成分は安全性であるため，単純な受理条件を持ち冪集合決定化が可能な安全オートマトンで受理することができる．一方で，安定性成分，対偶安全性成分及び広義公平性成分は，元の時間的性質が持つ接尾辞の複雑さを維持するため，複雑な受理条件を持ち決定化において複雑な手続き [12] [4] を要する ω-オートマトンとしてしか構成できない．そのため，安定性成分，対偶安全性成分及び広義公平性成分で近似したとしても計算コストの抑制は期待できない．

また，式 (5) の形式に基づく積分解においては，各成分の対になる時間的性質は，積分解となるものの内で最弱の性質であり，有用な上方近似となることは期待できない．一方で，その時間的性質を得るために ω-オートマトンに対して計算コストが大きい補演算 [5] を行う必要がある．そのため，分解まで行うのであれば，計算コストに見合う有用性を見出さなければならない．なお，式 (5) 以外の形式により，最弱でない対性質を効率的に構成できる可能性はある．

7 おわりに

本稿では，補・逆・対偶関係を提案して時間的性質類間の関係を整理し，4 つの時間的性質類に関して成分構成可能であることを示した．また，3 つの時間的性質類に関しては，補対称性に基づいて時間的性質の下方近似に利用することも可能である．さらに，それらの成分を基に安全性-活性積分解とは異なる 4 種の積分解が可能であることを言語的観点と位相的観点の両面から証明した．既存の時間的性質類の研究では自然な距離が定義できる標準的な位相空間が用いられていたが，本研究では標準的な位相空間とは全く異なる位相空間を用いた．

今後の課題は，計算理論的に扱い易い双安全性類及び検証対象のシステムの振る舞いの前提条件として広く用いられる広義公平性について，形式検証に上手く応用する具体的な手法・技法を模索することである．

参 考 文 献

[1] Alpern, B. and Schneider, F. B.: Defining Liveness, *Information Processing Letters*, Vol. 21, No. 4(1985), pp. 181–185.

[2] Alpern, B. and Schneider, F. B.: Recognizing Safety and Liveness, *Distributed Computing*, Vol. 2, No. 3(1987), pp. 117–126.

[3] Diekert, V. and Leucker, M.: Topology, Monitorable Properties and Runtime Verification, *Theoretical Computer Science*, Vol. 537(2014), pp. 29–41.

[4] Esparza, J. and Křetínský, J.: From LTL to Deterministic Automata: A Safraless Compositional Approach, *Computer Aided Verification*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 8559, 2014, pp. 192–208.

[5] Havlena, V., Lengál, O., and Šmahlíková, B.: Complementing Büchi Automata with Ranker, *Computer Aided Verification*, 2022, pp. 188–201.

[6] Henzinger, T. A., Mazzocchi, N., and Saraç, N. E.: Quantitative Safety and Liveness, *Foundations of Software Science and Computation Structures*, 2023, pp. 349–370.

[7] Lamport, L.: Proving the Correctness of Multiprocess Programs, *IEEE Transactions on Software Engineering*, Vol. SE-3, No. 2(1977), pp. 125–143.

[8] Landweber, L. H.: Decision Problems for ω-Automata, *Mathematical Systems Theory*, Vol. 3(1969), pp. 376–384.

[9] Manna, Z. and Pnueli, A.: A Hierarchy of Temporal Properties, *Proceedings of the Ninth Annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, 1990, pp. 377–410.

[10] Peled, D. and Havelund, K.: Refining the Safety–Liveness Classification of Temporal Properties According to Monitorability, *Models, Mindsets, Meta: The What, the How, and the Why Not?*, LNCS 11200, 2019, pp. 218–234.

[11] Pnueli, A. and Rosner, R.: On the Synthesis of a Reactive Module, *Proceedings of the 16th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, 1989, pp. 179–190.

[12] Safra, S.: On the Complexity of Omega Automata, *Proceedings of the 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 1988, pp. 319–327.

[13] Schewe, S. and Finkbeiner, B.: Bounded Synthesis, *Automated Technology for Verification and Analysis*, 2007, pp. 474–488.

[14] Sistla, A. P.: Safety, Liveness and Fairness in Temporal Logic, *Formal Aspects of Computing*, Vol. 6, No. 5(1994), pp. 495–511.

[15] Tomita, T., Hagihara, S., Shimakawa, M., and Yonezaki, N.: A Characterization on Necessary Conditions of Realizability for Reactive System Specifications, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E105.D, No. 10(2022), pp. 1665–1677.

[16] Völzer, H., Varacca, D., and Kindler, E.: Defining Fairness, *CONCUR 2005 – Concurrency Theory*, 2005, pp. 458–472.

[17] Wagner, K.: On ω-Regular Sets, *Information and Control*, Vol. 43, No. 2(1979), pp. 123–177.