日本ソフトウェア科学会第 40 回大会 (2023 年度) 講演論文集

いくつかの組合せ子の非停止性

岩見 宗弘

Smullyan (1994) は，Smullyan (1985) で紹介した組合せ子以外にも多くの組合せ子を紹介している．岩見 (2023) はそれらの組合せ子 37 例のうち 10 例に対して，停止性を持つかどうかが不明であることを調査している．本論文は，これらの 10 例のうち 4 例の組合せ子 $P, S_1, S_2, \mathcal{D}_2$ が停止性を持たないことを示す．これは現在進行中の研究の報告である．

1 はじめに

Smullyan は文献 [18] において，多くの組合せ子を紹介している．また，Smullyan は文献 [19] において，文献 [18] で紹介した以外にも多くの組合せ子を紹介している．組合せ子は項書き換えシステムの分かりやすい例として使用されている [11] [22]．また，組合せ子は関数型プログラミング言語の効率的な実装に応用されている [16] [23]．

様々な書き換えシステムにおいて，停止性はすべての書き換えの結果が必ず得られることを保証する重要な性質である．組合せ子が持つ書き換え規則だけからなる項書き換えシステムは一見単純であるが，書き換え規則が 1 つだけからなる項書き換えシステムの停止性は一般に決定不能である [5]．

組合せ子において，停止性を持つ組合せ子も存在すれば，停止性を持たない組合せ子も存在する．例えば，組合せ子 K, B, J は停止性を持ち [17]，組合せ子 S, O, L は停止性を持たないことが知られている [2] [3] [4] [24] [25] [10] [8] [20] [21]．

最近，岩見 [9] は文献 [19] で紹介されている組合せ子が停止性をもつかどうかを調べている．その結果，37 例中 10 例は停止性をもつかどうかが不明であることが分かった．これらの 10 例に対して，最初に辞書式経路順序 [1] [15] を用いたが停止性は示せなかった．次に，停止性検証ツール [7] [12] [13] を用いたが”Maybe” と出力された．

本論文では，これらの 10 例のうち 4 例の組合せ子 $P, S_1, S_2, \mathcal{D}_2$ が停止性を持たないことを示す．組合せ子の停止性については表 1 にまとめる．これは現在進行中の研究の報告である．

本論文の構成は以下の通りである．第 2 節では，項書き換えシステムの定義を与える．第 3 節では，組合せ子 $P, S_1, S_2, \mathcal{D}_2$ の非停止性について述べる．第 4 節では，結論を述べる．

2 準備

本節では，項書き換えシステムの定義について述べる．項書き換えシステムの詳細については文献 [1] [15] [22] を参照して頂きたい．

関数記号の集合を $\mathcal{F}$，**変数**の加算無限集合を $\mathcal{V}$ と表す ($\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$)．0 引数の関数記号を**定数**とよび，$n$ 引数の関数記号を $\mathcal{F}_n$ と表す．$\mathbb{N}_+$ を正整数集合とし，正整数の有限列の集合を $\mathbb{N}_+^*$ と記す．有限列 $p, q \in \mathbb{N}_+^*$ の連結を $p.q$ と記す．$\mathcal{F}$ 上の**項**の集合 $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する．(1) $\mathcal{V} \subseteq T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$，(2) $f \in \mathcal{F}_n$ かつ $t_1, \ldots, t_n \in T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$

---

* Non-Termination of Some Combinators.
This is an unrefereed paper. Copyrights belong to the Author(s).

Munehiro Iwami, 島根大学総合理工学部知能情報デザイン学科, Dept. of Information Systems Design and Data Science, Shimane University.

ならば $f(t_1,\ldots,t_n)\in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$．変数を含まない項を**基礎項**といい，基礎項全体の集合を $T(\mathcal{F})$ により表す．項 t の**位置**の集合は $\mathbb{N}_+$ 上の有限列の集合であり，次のように帰納的に定義する．(1) $t=x\in\mathcal{V}$ のとき，$Pos(t)=\{\epsilon\}$ とする．位置 ϵ を**根位置**とよぶ．(2) $t=f(t_1,\ldots,t_n)$ のとき，$Pos(t)=\{\epsilon\}\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{i.p\mid p\in Pos(t_i)\}$．位置 $p\in Pos(t)$ における項 t の部分項 $t|_p$ を次のように定義する．(1) $p=\epsilon$ のとき，$t|_p=t$，(2) $p=i.q, 1\leq i\leq n$，かつ $t=f(t_1,\ldots,t_n)$ のとき，$t|_p=t_i|_q$．位置集合上の接頭辞順序を $p\leq q\Leftrightarrow\exists r\in\mathbb{N}_+^*.\ q=p.r$ により定義する．$\mathcal{F}\cup\{\Box\}$ 上の項を**文脈**という．すなわち，0 個以上のホール $\Box$ を含む項の集合 $T(\mathcal{F}\cup\{\Box\},\mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する．(1) $\mathcal{V}\subseteq T(\mathcal{F},\mathcal{V})$，(2) $\Box\in T(\mathcal{F}\cup\{\Box\},\mathcal{V})$，(3) $f\in\mathcal{F}_n$ かつ $t_1,\ldots,t_n\in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ ならば $f(t_1,\ldots,t_n)\in T(\mathcal{F}\cup\{\Box\},\mathcal{V})$．文脈 C がホール $\Box$ を 1 つだけ含みかつ $C|_p=\Box$ とき，$C[\,]_p$ と表す．$C[t]_p$ は文脈 $C[\,]_p$ のホール $\Box$ を項 t で置き換えた結果である．$t=C[s]_p$ として表すことができるならば，s は t の**部分項**であるといい，$s\trianglelefteq t$ と表す．さらに，項 s の位置 p の部分項 $s|_p$ をホールに置き換えて得られる文脈を $s[\,]_p$ と表す．項 t に出現する変数の集合を $\mathcal{V}(t)$ と表す．項 t 中の任意の変数が高々1 回しか出現しないとき，t を**線形**であるとよぶ．$t|_p\notin\mathcal{V}$ のとき，$t|_p$ を t の**非変数部分項**といい，p を t の**非変数位置**という．**代入** σ を $\mathcal{V}$ から $T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ への定義域 $dom(\sigma)=\{x\in\mathcal{V}\mid\sigma(x)\neq x\}$ が有限である写像とする．すべての代入 σ は項 $f(t_1,\ldots,t_n)\in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ に対して，$\sigma(f(t_1,\ldots,t_n))=f(\sigma(t_1),\ldots,\sigma(t_n))$ を満たす写像 $\sigma: T(\mathcal{F},\mathcal{V})\rightarrow T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ へ拡張できる．以下では，$\sigma(t)$ の代わりに $t\sigma$ という記法を使用する．**書き換え規則** $l\rightarrow r$ は $T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ 上の方向付けられた等式であり，次の条件を満たす：(1) $l\notin\mathcal{V}$，(2) $\mathcal{V}(r)\subseteq\mathcal{V}(l)$．書き換え規則の集合 $\mathcal{R}$ を**項書き換えシステム** (TRS) とよぶ．項 $s,t\in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ に対して，書き換え規則 $l\rightarrow r\in\mathcal{R}$，代入 σ，文脈 $C[\,]_p$ が存在して，$s=C[l\sigma]_p$ かつ $t=C[r\sigma]_p$ のとき，$s\rightarrow_{p,\mathcal{R}} t$ と表す．これを位置 p における項 s から項 t への**簡約**または**書き換えステップ**とよぶ．部分項 $s|_p$ を**リデックス**とよぶ．文脈から明らかな場合または必要がない場合は $p,\mathcal{R}$ を省略する．TRS $\mathcal{R}$ が下記の条件を満たすとき，**直交**であるという．(1) 任意の $l\rightarrow r\in\mathcal{R}$ に対して，l が線形である．(2) 書き換え規則は重なりをもたない，すなわち，書き換え規則 $l\rightarrow r, l'\rightarrow r'\in\mathcal{R}$ と各非変数位置 $p\in Pos(l)$ に対して $l|_p$ と l' は単一化できない．このとき，一般性を失うことなく $\mathcal{V}(l|_p)\cap\mathcal{V}(l')=\emptyset$ と仮定する．$l\rightarrow r=l'\rightarrow r'$ のとき，さらに $p\neq\epsilon$ と仮定する．任意の $l\rightarrow r\in\mathcal{R}$ に対して $\mathcal{V}(l)=\mathcal{V}(r)$ のとき，TRS $\mathcal{R}$ は**非消去**であるという．項 t に対して，$t\rightarrow_{\mathcal{R}} u$ を満たす項 u が存在しないとき，t を $\mathcal{R}$ の**正規形**といい，$NF(\mathcal{R})$ と表す．$\rightarrow_{\mathcal{R}}$ の反射推移的閉包を $\rightarrow_{\mathcal{R}}^*$ と表し，$\rightarrow_{\mathcal{R}}$ の推移的閉包を $\rightarrow_{\mathcal{R}}^+$ と表す．TRS $\mathcal{R}$ が無限書き換え列 $t_0\rightarrow_{\mathcal{R}} t_1\rightarrow_{\mathcal{R}} t_2\rightarrow_{\mathcal{R}}\cdots$ を持たないとき，**停止性を持つ**という．TRS $\mathcal{R}$ が停止性を持たないとき，**非停止性を持つ**という．有限または無限書き換え列 $t_0\rightarrow_{\mathcal{R}} t_1\rightarrow_{\mathcal{R}} t_2\rightarrow_{\mathcal{R}}\cdots$ に対して，項 t_0 を書き換え列の**開始項**とよぶ．任意の $t\in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ が正規形を持つとき，TRS $\mathcal{R}$ が**弱停止性を持つ**という．

3 組合せ子の非停止性

本節では，組合せ子 $P,S_1,S_2,\mathcal{D}_2$ が停止性を持たないことを示す．本節において，組合せ子の書き換え規則からなる TRS の例では中値記法の適用演算子 $\cdot$ を用いる．すなわち，$\cdot$ は 2 引数の関数記号である．また，$\cdot$ は左結合であるとして，不要な括弧は省略する．なお，無限書き換え列中では $\cdot$ も省略する．各組合せ子の記号は定数として扱う．

命題 1 ([11] [22]) $\mathcal{R}$ を直交かつ非消去な TRS とする．このとき，$\mathcal{R}$ が弱停止性を持つことと $\mathcal{R}$ が停止性を持つことは同値である．

本節で扱う組合せ子の書き換え規則からなる TRS は直交かつ非消去である．命題 1 より，これらの TRS では弱停止性を持つことと停止性を持つことは同値である．

3.1 組合せ子 P の非停止性

組合せ子 B,M はそれぞれ書き換え規則 $Bxyz\rightarrow x(yz), Mx\rightarrow xx$ を持つ．組合せ子 T は書き換え規則 $Txy\rightarrow yx$ を持つ．次の書き換え規則を持つ組合

せ子 P は組合せ子 B, T, M により定義される [19].

$$Pxyz \to z(xyz)$$

いま，Y が書き換え規則 $Yx \to x(Yx)$ を持つ不動点組合せ子のとき，$YPPx \to P(YP)Px \to x(YPPx)$ より，YPP も不動点組合せ子である．

TRS $\mathcal{R}(P) = \{P \cdot x \cdot y \cdot z \to z \cdot (x \cdot y \cdot z)\}$ とする．

本研究では，最初に手作業において TRS $\mathcal{R}(P)$ の無限書き換え列を構成した．組合せ子 P の書き換え規則は組合せ子 O の書き換え規則 $Oxy \to y(xy)$ によく似ており，無限書き換え列が存在するのではないかと考えた．また，組合せ子 O の書き換え規則は，組合せ子 S の書き換え規則 $Sxyz \to xz(yz)$ によく似ている．さらに，組合せ子 O の無限書き換え列は $OO(OO)$ から始まり [10] [8]，組合せ子 S の無限書き換え列は $SSS(SSS)(SSS)$ から始まる [2] [3] [24] [25]．そこで，組合せ子 P の無限書き換え列は $PPP(PPP)$ から始まるのではないかと考え，実際に無限書き換え列が得られた．

次に，文献 [14] において，書き換え規則 $P = \lambda x.\lambda y.\lambda z.z(xyz)$ を追加して，最外戦略で β-簡約を行い，手作業で得られた無限書き換え列を確認した．また，Mathematica [26] [27] を用いて，$PPP(PPP)$ の正規形を求める実験を行ったが，正規形は得られなかった．さらに，$PPP(PPP)$ を 50 回書き換える実験を行ったが，正規形は得られなかった．

補題 2 組合せ子 P は停止性を持たない．

(証明) 組合せ子 P は下記の無限書き換え列を持つ．ここで，$A = PPP$ とし，$X_0 = A, X_{n+1} = PPX_n, Y_1 = PAX_2, X_{n+1} = PAY_n$ とする．すなわち，$X_0 = PPP, X_1 = PPA, X_2 = PPX_1 = PP(PPA), X_3 = PP(PP(PPA)), \ldots, Y_1 = PA(PP(PPA)), Y_2 = PA(PA(PP(PPA))), \ldots$.

$$\begin{array}{ll}
 & X_0X_0 \to_\epsilon X_0X_1 \\
\to_\epsilon & X_1X_2 \to_\epsilon X_2Y_1 \\
\to_\epsilon & Y_1(PX_1Y_1) \\
\to_\epsilon & PX_1Y_1(X_0X_2(PX_1Y_1)) \\
\to_\epsilon & X_0X_2(PX_1Y_1)(X_1Y_1(X_0X_2(PX_1Y_1))) \\
\to_{11} & X_2X_3(PX_1Y_1)(X_1Y_1(X_0X_2(PX_1Y_1))) \\
\to_{11} & X_3(PX_1X_3)(PX_1Y_1)(X_1Y_1(X_0X_2(PX_1Y_1))) \\
\to_{11} & PX_1X_3(PX_2(PX_1X_3)) \\
 & (PX_1Y_1)(X_1Y_1((X_0X_2)(PX_1Y_1))) \\
\to & \cdots
\end{array}$$

実際は，組合せ子 S の非停止性の証明 [3] [24] [25] のように，上記の無限書き換え列に規則性を見出して証明する必要がある．しかしながら，本研究では規則性を見出すことはできなかった． □

3.2 組合せ子 S_1, S_2 の非停止性

組合せ子 S は書き換え規則 $Sxyz \to xz(yz)$ を持つ．次の書き換え規則を持つ組合せ子 S_1, S_2 は B, S から定義される [19].

$$S_1xyzw \to xyw(zw), S_2xyzw \to xzw(yzw)$$

1. TRS $\mathcal{R}(S_1) = \{S_1 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot w \to x \cdot y \cdot w \cdot (z \cdot w)\}$ とする．

本研究では，最初に手作業において TRS $\mathcal{R}(S_1)$ の無限書き換え列を構成した．組合せ子 S_1 の書き換え規則は組合せ子 S の書き換え規則 $Sxyz \to xz(yz)$ によく似ており，無限書き換え列が存在するのではないかと考えた．組合せ子 S の無限書き換え列は $SSS(SSS)(SSS)$ から始まる．そこで，組合せ子 S_1 の無限書き換え列は $S_1S_1S_1S_1(S_1S_1S_1S_1)(S_1S_1S_1S_1)(S_1S_1S_1S_1)$ から始まるのではないかと考え，実際に無限書き換え列が得られた．

次に，文献 [14] において，書き換え規則 $S_1 = \lambda x.\lambda y.\lambda z.\lambda w.xyw(zw)$ を追加して最外戦略で β-簡約を行い，手作業で得られた無限書き換え列を確認した．また，Mathematica を用いて，上記の開始項の正規形を求める実験を行ったが，正規形は得られなかった．さらに，上記の開始項を 50 回書き換える実験を行ったが，正規形は得られなかった．

補題 3 組合せ子 S_1 は停止性を持たない．

(証明) 組合せ子 S_1 は下記の無限書き換え列を持つ． $A = S_1S_1S_1S_1$ とする．$X_0 = A, X_{n+1} = S_1A$ とする．すなわち，$X_1 = S_1A, X_2 = S_1AA, X_3 = S_1AAA, \ldots$．

$$
\begin{array}{ll}
 & X_0X_0X_0X_0 \\
\to_{11} & S_1S_1X_0X_1X_0X_0 \\
\to_{1} & X_2X_2X_0 \\
\to_{\epsilon} & X_0X_0X_0X_3 \\
\to_{11} & S_1S_1X_0X_1X_0X_3 \\
\to_{1} & X_2X_2X_3 \\
\to_{\epsilon} & X_0X_0X_3(X_2X_3) \\
\to_{11} & S_1S_1X_0X_1X_3(X_2X_3) \\
\to_{1} & X_1X_3(X_1X_3)(X_2X_3) \\
\to_{\epsilon} & X_0X_3(X_2X_3)(X_1X_3)(X_2X_3) \\
\to_{11} & S_1S_1X_3(S_1X_3)(X_2X_3)(X_1X_3(X_2X_3)) \\
\to_{1} & S_1X_3(X_2X_3)(S_1X_3(X_2X_3))X_3(X_2X_3) \\
\to & \cdots
\end{array}
$$

実際は，組合せ子 S の非停止性の証明[3] [24] [25] のように，上記の無限書き換え列に規則性を見出して証明する必要がある．しかしながら，本研究では規則性を見出すことはできなかった． □

2. TRS $\mathcal{R}(S_2) = \{S_2{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}z{\cdot}w \to x{\cdot}z{\cdot}w{\cdot}(y{\cdot}z{\cdot}w)\}$ とする．

組合せ子 S_2 の場合は，組合せ子 S_1 と同様に $S_2S_2S_2S_2(S_2S_2S_2S_2)(S_2S_2S_2S_2)(S_2S_2S_2S_2)$ から無限書き換え列が得られた．

また，Mathematica を用いて，上記の開始項の正規形を求める実験を行ったが，正規形は得られなかった．さらに，Mathematica を用いて，上記の開始項を 38 回書き換える実験を行ったが，正規形は得られなかった．組合せ子 S_2 の場合は 39 回以上書き換える実験を行うと，出力が得られなかった．

補題 4 組合せ子 S_2 は停止性を持たない．

(証明) 組合せ子 S_2 は下記の無限書き換え列を持つ．$A = S_2S_2S_2S_2$ とする．$X_0 = A, X_{n+1} = S_2S_2X_n$ とする．また，$Y_1 = X_0X_1X_0, Y_{n+1} = X_0Y_nX_0$ とする．すなわち，$X_1 = S_2S_2X_0 = S_2S_2A, X_2 = S_2S_2X_1 = S_2S_2(S_2S_2A), \ldots, Y_1 = X_0X_1X_0 = A(S_2S_2A)A, Y_2 = X_0Y_1X_0 = A(A(S_2S_2A)A)A, \ldots$．

$$
\begin{array}{ll}
 & X_0X_0X_0X_0 \\
\to_{11} & X_1X_1X_0X_0 \\
\to_{1} & S_2X_1X_0Y_1X_0 \\
\to_{\epsilon} & X_1Y_1X_0Y_2 \\
\to_{1} & S_2Y_1X_0Y_2Y_2 \\
\to_{\epsilon} & X_0X_1X_0Y_2Y_2(Y_2Y_2) \\
\to_{1^4} & S_2S_2X_1X_2X_0Y_2Y_2(X_0Y_2Y_2) \\
\to_{1^4} & S_2X_2X_0(X_1X_2X_0)Y_2Y_2(X_0Y_2Y_2) \\
\to & \cdots
\end{array}
$$

実際は，組合せ子 S の非停止性の証明[3] [24] [25] のように，上記の無限書き換え列に規則性を見出して証明する必要がある．しかしながら，本研究では規則性を見出すことはできなかった． □

3.3 組合せ子 $\mathcal{D}_2$ の非停止性

組合せ子 C, W はそれぞれ書き換え規則 $Cxyz \to xzy, Wxy \to xyy$ を持つ．組合せ子 $\mathcal{D}_2$ は B, C, W から構成される．組合せ子 $\mathcal{D}_2$ は次の書き換え規則を持つ．

$$\mathcal{D}_2xyzw \to xw(yz)(xw)$$

TRS $\mathcal{R}(\mathcal{D}_2) = \{\mathcal{D}_2{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}z{\cdot}w \to x{\cdot}w{\cdot}(y{\cdot}z){\cdot}(x{\cdot}w)\}$ とする．

組合せ子 $\mathcal{D}_2$ の場合は，組合せ子 S_1 と同様に $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2)(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2)(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2)$ から無限書き換え列が得られた．

また，Mathematica を用いて，上記の開始項の正規形を求める実験を行ったが，正規形は得られなかった．さらに，Mathematica を用いて，上記の開始項を 50 回書き換える実験を行ったが，正規形は得られなかった．

補題 5 組合せ子 $\mathcal{D}_2$ は停止性を持たない．

(証明) 組合せ子 $\mathcal{D}_2$ は下記の無限書き換え列を持つ．$A = \mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2$ とする．$X_0 = A, X_{n+1} = \mathcal{D}_2X_n$($n+1$ が奇数のとき)$, X_{n+1} = \mathcal{D}_2\mathcal{D}_2X_n$($n+1$ が偶数のとき) とする．すなわち，$X_1 = \mathcal{D}_2A, X_2 = \mathcal{D}_2\mathcal{D}_2X_1 = \mathcal{D}_2\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_2A), X_3 = \mathcal{D}_2X_2 = \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_2A)), X_4 = \mathcal{D}_2\mathcal{D}_2X_3 = \mathcal{D}_2\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_2A))), X_5 = \mathcal{D}_2X_4 =$

$\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_2 A))))$, ...

$$
\begin{array}{ll}
 & X_0X_0X_0X_0 \\
\to_{1^2} & X_1(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2)X_1X_0X_0 \\
\to_1 & X_0X_0X_1(X_0X_0)X_0 \\
\to_{1^3} & X_1(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2)X_1X_2(X_0X_0)X_0 \\
\to_{1^2} & X_0X_2X_2(X_0X_2)(X_0X_0)X_0 \\
\to_{1^4} & X_3(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2)X_3X_2(X_0X_2)(X_0X_0)X_0 \\
\to_{1^3} & X_2X_2X_4(X_2X_2)(X_0X_2)(X_0X_0)X_0 \\
\to_{1^4} & X_5(X_1X_2)X_5(X_2X_2)(X_0X_2)(X_0X_0)X_0 \\
\to_{1^2} & X_4(X_2X_2)((X_1X_2)X_5)(X_4(X_2X_2))(X_0X_0)X_0 \\
\to_{1^3} & \mathcal{D}_2((X_1X_2)X_5)(X_3(X_2X_2))(\mathcal{D}_2((X_1X_2)X_5)) \\
 & (X_4(X_2X_2))(X_0X_0)X_0 \\
\to_{1^2} & (X_1X_2)X_5(X_4(X_2X_2))((X_3(X_2X_2)) \\
 & (\mathcal{D}_2((X_1X_2)X_5))((X_1X_2)X_5(X_4(X_2X_2))) \\
 & (X_0X_0)X_0 \\
\to & \cdots
\end{array}
$$

実際は，組合せ子 S の非停止性の証明 [3] [24] [25] のように，上記の無限書き換え列に規則性を見出して証明する必要がある．しかしながら，本研究では規則性を見出すことはできなかった． □

3.4 非停止性のまとめ

補題 2, 3, 4, 5 から，次の定理が成り立つ．

定理 6 $Z \in \{P, S_1, S_2, \mathcal{D}_2\}$ とする．このとき，組合せ子 Z は停止性を持たない．

他の 6 例の組合せ子については，下記のことのみ明らかになかった．これらは文献 [14] と Mathmatica で確認している．これら 6 例の組合せ子の停止性は未解決のままである．

1. 組合せ子 P_3 において，$P_3P_3P_3(P_3P_3P_3)$ は正規形を持つ．命題 1 より，この項から無限書き換え列は得られない．

2. 組合せ子 Φ において，$\Phi\Phi\Phi\Phi(\Phi\Phi\Phi\Phi)(\Phi\Phi\Phi\Phi)(\Phi\Phi\Phi\Phi)$ は正規形を持つ．命題 1 より，この項から無限書き換え列は得られない．

3. 組合せ子 Φ_2 において，$\Phi_2\Phi_2\Phi_2\Phi_2\Phi_2(\Phi_2\Phi_2\Phi_2\Phi_2\Phi_2)(\Phi_2\Phi_2\Phi_2\Phi_2\Phi_2)(\Phi_2\Phi_2\Phi_2\Phi_2\Phi_2)(\Phi_2\Phi_2\Phi_2\Phi_2\Phi_2)$ は正規形を持つ．命題 1 より，この項から無限書き換え列は得られない．

4. 組合せ子 S_3 において，$S_3S_3S_3S_3S_3(S_3S_3S_3S_3S_3)(S_3S_3S_3S_3S_3)(S_3S_3S_3S_3S_3)(S_3S_3S_3S_3S_3)$ は正規形を持つ．命題 1 より，この項から無限書き換え列は得られない．

5. 組合せ子 S_4 において，$S_4S_4S_4S_4S_4(S_4S_4S_4S_4S_4)(S_4S_4S_4S_4S_4)(S_4S_4S_4S_4S_4)(S_4S_4S_4S_4S_4)$ は正規形を持つ．命題 1 より，この項から無限書き換え列は得られない．

6. 組合せ子 $\mathcal{D}_1$ において，$\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1)(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1)(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1)$ は正規形を持つ．命題 1 より，この項から無限書き換え列は得られない．

項書き換えシステムの枠組みによる組合せ子の停止性に関する結果を表 1 にまとめる．

4 おわりに

文献 [9] において，10 例の組合せ子は停止性を持つかどうかが不明であると報告した．本論文では，これらの 10 例のうち 4 例の組合せ子 $P, S_1, S_2, \mathcal{D}_2$ が停止性を持たないことを示した．しかしながら，本研究で与えた組合せ子の書き換え列が本当に無限書き換え列であることを理論的に証明する必要がある．

今後の課題は，本研究で与えた組合せ子の書き換え列が本当に無限書き換え列であることを理論的に証明することである．また，文献 [6] において，ボトムアップ木オートマトンを用いて項書き換えシステムの停止性を反証する手法が提案され，組合せ子 S と O の停止性が反証されている．そこで，この手法を適用して，4 例の組合せ子の停止性を反証することも課題である．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 22K11904 の助成を受けている．

参 考 文 献

[1] Baader, F. and Nipkow, T. : *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.
[2] Barendregt, H. P. : *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics, 2nd revised edition*, North-Holland, 1984.
[3] Barendregt, H. P. and Manzonetto, G. : *A Lambda Calculus Satellite*, College Publications, 2022.
[4] Barendregt, H. P., Endrullis, J., Klop, J. W. and Waldmann, J. : Dance of the Starlings, Fitting, M.,

表 1　組合せ子の停止性

番号	組合せ子	書き換え規則	停止性
1	P	$\mathsf{P}xyz \to z(xyz)$	$\times$
2	P_3	$\mathsf{P}_3xyz \to y(xzy)$	$\bigotimes$, ?
3	Φ	$\Phi xyzw \to x(yw)(zw)$	$\bigotimes$, ?
4	Φ_2	$\Phi_2 xyzw_1w_2 \to x(yw_1w_2)(zw_1w_2)$	$\bigotimes$, ?
5	S_1	$\mathsf{S}_1xyzw \to xyw(zw)$	$\times$
6	S_2	$\mathsf{S}_2xyzw \to xzw(yzw)$	$\times$
7	S_3	$\mathsf{S}_3xyzwv \to xy(zv)(wv)$	$\bigotimes$, ?
8	S_4	$\mathsf{S}_4xyzwv \to z(xwv)(ywv)$	$\bigotimes$, ?
9	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_1xyzw \to xz(yw)(xz)$	$\bigotimes$, ?
10	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_2xyzw \to xw(yz)(xw)$	$\times$

(×：不成立 (本研究)，⨂：Maybe([7] [12] [13])，？：未解決)

Rayman, B. (eds), *Raymond Smullyan on Self Reference*, Springer, 2018, pp.67–111.

[5] Dauchet, M. : Simulation of Turing machines by a regular rewrite rule, *Theoretical Computer Science*, Vol. 103, Issue 2 ,1992, pp. 409–420.

[6] Endrullis, J. and Zantema, H. : Proving non-termination by finite automata, *Proc. of the 26th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, RTA 2015, LIPIcs: Leibniz International Proceedings in Informatics, Vol. 36, 2015, pp.160–176.

[7] Giesl, J. et al. : AProVE (AUTOMATED PROGRAM VERIFICATION ENVIRONMENT), Web Interface, https://aprove.informatik.rwth-aachen.de/

[8] 岩見宗弘：組合せ子の非循環性と関連する性質について, 情報処理学会論文誌プログラミング, Vol. 2, No.2, 2009, pp.97–104.

[9] 岩見宗弘：様々な組合せ子の非 ω-強頭部正規化可能性・非基礎ループ性・非循環性, 情報処理学会論文誌プログラミング, Vol. 16, No. 3, 2023, pp.14–27.

[10] Klop, J. W. : New fixed point combinators from old, *Reflections on Type Theory, Lambda Calculus, and the Mind*, Essays Dedicated to Barendregt, H. P. on the Occasion of his 60th Birthday, 2007, pp.197–210.

[11] Klop, J. W. : Term rewriting systems, In Abramsky, S., Gabbay, D. and Maibaurn, T. (eds.), *Handbook of Logic in Computer Science*, Oxford University Press, 1992, pp. 1–116.

[12] Lucas, S. et al. : MU-TERM (Verify termination properties automatically), Web Interface, http://zenon.dsic.upv.es/muterm/index.php/web-interface/

[13] Middeldorp, A. et al. : TTT2 (Tyrolean Termination Tool 2), Web Interface, http://colo6-c703.uibk.ac.at/ttt2/web/

[14] F. D. Mehta et al. : Lambda Calculus Calculator, https://lambdacalc.io/

[15] Ohlebusch, E. : *Advanced Topics in Term Rewriting*, Springer, 2002.

[16] Peyton Jones, S. L. : *The Implementation of Functional Programing Languages*, Prentice Hall, 1987.

[17] Probst, D. and Studer, T. : How to normalize the Jay, *Theoretical Computer Science*, Vol. 254(1-2), 2001, pp. 677–681.

[18] Smullyan, R. : *To Mock a Mockingbird*, Knopf, New York, 1985.

[19] Smullyan, R. : *Diagonalization and Self-Reference*, Oxford University Press, 1994.

[20] Sprenger, M. and Wymann-Böni, M. : How to decide the lark, *Theoretical Computer Science*, Vol. 110, 1993, pp. 419-432.

[21] Statman, R. : The word problem for Smullyan's lark combinator is decidable, *J. Symbolic Computation*, Vol. 7, 1989, pp. 103-112.

[22] Terese : *Term Rewriting Systems*, Cambridge University Press, 2003.

[23] Turner, D. A. : A new implementation technique for applicative languages, *J. of Software: Practice and Experience*, Vol. 9, Issue 1, 1979, pp.31–49.

[24] Waldmann, J. : The Combinator S, *Information and Computation*, Vol. 159, Issues 1-2, 2000, pp.2–21.

[25] Waldmann, J. : The Combinator S, PhD thesis, Friedrich-Schiller-Universität Jena, 1998.

[26] Wolfram : Mathematica, https://www.wolfram.com/mathematica/

[27] Wolfram, S. : *Combinators: A Centennial View*, Wolfram Media Inc, 2021.