べき集合クオンテールの別表現の発見

高林 俊規　西澤 弘毅

プログラム検証に応用されている代数構造にクリーニ代数や単位的クオンテールという代数がある．どちらも「繰り返し」を意味する演算*を構成できるため，while 文のモデル化に有効である．特に，完備上半束がべき集合である単位的クオンテールを，べき集合クオンテールという．任意のべき集合クオンテールは二項関係的クオンテールに埋め込めるが，その根本的な理由はわかっていない．著者らは，べき集合クオンテールを対象とした圏 PQt が，二項関係を射とする Rel 上の，あるモナドのアイレンベルグムーア圏と同型であることを証明した．これにより PQt と二項関係の関連性が少し明らかになった．

There are algebraic structures used in program verification called Kleene algebras and unitary quantales. Both can construct the operation '*' meaning "iteration", making them effective for modeling while loops. In particular, the unitary quantale whose complete upper semilattice is a powerset is called a powerset quantale. Any powerset quantale can be embedded into a binary relational quantale, but the fundamental reason for this is unknown. We proved that the category PQt of powerset quantales is isomorphic to a certain Eilenberg-Moore category of a monad on the category Rel, which is the category of sets and binary relations. This fact clarified the relationship between PQt and binary relations a little.

1　はじめに

プログラム検証に応用されている代数的構造にクリーニ代数や単位的クオンテールという代数がある [1]．クリーニ代数を構成する要素として「繰り返し」を意味する演算*がある．この演算子は例えば，while 文のモデル化に有効である．単位的クオンテールはクリーニ代数の演算*を構成できるため，クリーニ代数と同様に while 文のモデル化に有効である．

べき集合で完備上半束が与えられている単位的クオンテールをべき集合クオンテールといい，べき集合クオンテールを対象とした圏を PQt という．既存研究で任意のべき集合クオンテールが，ある二項関係をもとにしたべき集合クオンテールに埋め込めることが示された [2]．この，ある二項関係をもとにしたべき集合クオンテールのことを二項関係的クオンテールという．しかし，べき集合クオンテールが二項関係的クオンテールに埋め込める根本的な理由はわかっていない．そこで，べき集合クオンテールが二項関係的クオンテールに埋め込める理由を明らかにする手がかりを得るために，著者らは PQt と，二項関係を射とする圏 Rel 上の $(-)^*$-Alg という圏が同型であることを証明した．即ち，PQt の任意の対象と射が，$(-)^*$-Alg のある対象と射に，1 対 1 に対応することを証明した．つまり，べき集合クオンテールの別表現が，$(-)^*$-Alg の対象であることがわかった．これにより PQt と二項関係の関連性が少し明らかになった．

また，関連研究として次の研究がある．安田らは，二項関係とべき集合クオンテールの関係性を明らかにするために，前順序 R からべき集合クオンテール $\wp(R)$ の構成を，関手に発展させた [3]．安田らは，二

Discovery of alternative expressions of the powerset quantales.

Toshiki Takabayashi, 神奈川大学大学院工学研究科工学専攻情報システム創成領域, The Field of Information Systems Creation, Course of Engineering, Graduate School Engineering, Kanagawa University.

Koki Nishizawa, 神奈川大学情報学部システム数理学科, Department of Applied Systems and Mathematics, Faculty of Informatics, Kanagawa University.

項関係の中でも特に，前順序に注目したが，同型関手は得られなかった．本研究では前順序ではない条件に注目し，その結果，同型関手を得た．

本稿の残りの構成は以下の通りである．2 節では，べき集合クオンテールを対象とした圏 PQt を定義する．3 節では，$(-)^*$- 代数を対象とした圏 $(-)^*$-Alg を定義する．4 節では，PQt と $(-)^*$-Alg 間に関手を定義する．5 節と 6 節では，4 節で定義した概念が，実際に関手であることの証明をする．7 節では，4 節で定義した関手が，同型関手であることの証明をする．8 節では，3 節で定義した圏 $(-)^*$-Alg が Rel 上のモナド $(-)^*$ のアイレンベルグムーア圏であることを述べる．9 節では，本研究の結果をまとめる．

2 べき集合クオンテール

本節では，圏 PQt の対象，射，合成射，恒等射の定義を説明する．

定義 2.1 (単位的クオンテール)**.** 単位的クオンテール (unital quantale) とは以下のことを満たす組 $(Q, \leq, \vee, \odot, 1)$ のこと．

1. $(Q, \odot, 1)$ はモノイドである．即ち
   - $(Q, \odot)$ は半群である．
   - $1 \in Q$ は任意の $q \in Q$ に対して，$1 \odot q = q = q \odot 1$ を満たす．
2. $(Q, \leq, \vee)$ は完備上半束である．即ち
   - $(Q, \leq)$ は半順序集合．
   - Q の任意の部分集合 S に対して，$\vee S$ が S の上限である．
3. Q の任意の部分集合 S と Q の任意の要素 q に対し，$(\vee S) \odot q = \vee\{s \odot q | s \in S\}$ が成り立つ．
4. Q の任意の部分集合 S と Q の任意の要素 q に対し，$q \odot (\vee S) = \vee\{q \odot s | s \in S\}$ が成り立つ．

定義 2.2 (べき集合クオンテール)**.** べき集合クオンテール (powerset quantale) とは単位的クオンテールのうち，ある集合 X が存在して $(\wp(X), \subseteq, \cup) = (Q, \leq, \vee)$ を満たすもののことである．ただし，$\wp(A)$ は A のべき集合であり，$\subseteq$ は包含関係，$\cup\alpha$ は $\wp(X)$ の部分集合 α の和集合，すなわち $\cup\alpha = \{a | \exists Y \in \alpha, a \in Y\}$ である．

定義 2.3 (単位的準同型)**.** べき集合クオンテール $(\wp(X), \subseteq, \cup, \odot, 1)$ から $(\wp(X'), \subseteq, \cup, \odot', 1')$ への単位的準同型 f とは以下を満たすもののこと．

- f は $\wp(X)$ から $\wp(X')$ への写像
- $\wp(X)$ の任意の部分集合 α に対し，$f(\cup\alpha) = \cup\{f(Y) | Y \in \alpha\}$
- $\wp(X)$ の任意の要素 Y, Z に対し，$f(Y \odot Z) = f(Y) \odot' f(Z)$
- $f(1) = 1'$

定義 2.4 (PQt)**.** PQt とは以下からなる圏である．

- 対象はべき集合クオンテール．
- 射 f は単位的準同型．
- PQt での射 $f : (\wp(X), \subseteq, \cup, \odot, 1) \to (\wp(X'), \subseteq, \cup, \odot', 1')$ と $g : (\wp(X'), \subseteq, \cup, \odot', 1') \to (\wp(X''), \subseteq, \cup, \odot'', 1'')$ に対し $g \circ f$ は $\wp(X)$ の任意の要素 Y に対し $(g \circ f)(Y) = g(f(Y))$．
- PQt での対象 $A = (\wp(X), \subseteq, \cup, \odot, 1)$ に対し $\mathrm{id}_A : (\wp(X), \subseteq, \cup, \odot, 1) \to (\wp(X), \subseteq, \cup, \odot, 1)$ は $\wp(X)$ の任意の要素 Y に対し $\mathrm{id}_A(Y) = Y$．

3 $(-)^*$- 代数

本節では，圏 $(-)^*$-Alg の定義，及び，それを理解するために必要な概念について説明する．

定義 3.1 (Rel)**.** Rel とは以下の圏のことである．

- Rel の対象は集合
- Rel の対象 A から対象 B への射 $f : A \to B$ とは A から B への二項関係．つまり $A \times B$ の部分集合
- 射 $R : A \to B$ と $S : B \to C$ の合成射 $S \circ R : A \to C$ とは，$S \circ R = \{(a, c) | \exists b \in B, (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$
- 恒等射 $\mathrm{id}_A : A \to A$ とは恒等関係．つまり $\mathrm{id}_A = \{(a, a) | a \in A\}$

定義 3.2 ($(-)^*$)**.** 以下の $((-)^*, \mu, \eta)$ を Rel 上の自由モノイドモナドと言い，$(-)^*$ と省略して書くこともある．

- 集合 A に対し，A^* とは
  $A^* = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | n$ は 1 以上の整数，各 a_j は $a_j \in A\} \cup \{\varepsilon\}$ のこととする．
- $s \in A^*$ が n 組のとき，$|s| = n$ と書き，s を $(s_1, s_2, \cdots, s_{|s|})$ とも書く．$|\varepsilon| = 0$ である．

- 関手 $(-)^*$: Rel $\to$ Rel は対象 A を A^* に写し射 $R : A \to B$ を以下の $R^* : A^* \to B^*$ に写す. $R^* = \{(a,b) | |a| = |b|$, 各 (a_i, b_i) は $(a_i, b_i) \in R\}$
- 自然変換 $\mu : ((-)^*)^* \to (-)^*$ は以下で定義される集合 A ごとの以下の射 $\mu_A : (A^*)^* \to A^*$ からなる族.
$\mu_A = \{(t,s) | t \in (A^*)^*, s \in A^*, |s| = \sum_{i=1}^{|t|} |t_i|, (t_i)_j = s_{\left(\sum_{k=1}^{i-1} |t_k|\right)+j}\}$
- 自然変換 $\eta : \mathrm{Id}_{\mathrm{Rel}} \to (-)^*$ は以下で定義される集合 A ごとの以下の射 $\eta_A : A \to A^*$ からなる族.
$$\eta_A = \{(a, (a)) | a \in A\}$$
ただし組の 2 つ目の (a) は a からなる長さ 1 の列である.

定義 3.3 ($(-)^*$-Alg)**.** $(-)^*$-Alg とは以下からなる圏である.

- $(-)^*$-Alg の対象は $(-)^*$- 代数. 即ち, 組 (A, ρ) で以下を満たすもののこと.
  - A は Rel の対象
  - ρ は Rel の射 $\rho : A^* \to A$
  - $\rho \circ \mu_A = \rho \circ \rho^*$
  - $\rho \circ \eta_A = \mathrm{id}_A$
- $(-)^*$-Alg の対象 (A, ρ) から (A', ρ') への射 R とは, $(-)^*$- 準同型とする. 即ち, Rel での射 $R : A \to A'$ で $R \circ \rho = \rho' \circ R^*$ を満たすもの
- 射 $f : (A, \rho) \to (A', \rho')$ と $g : (A', \rho') \to (A''', \rho''')$ の合成 $g \circ f$ は Rel における $g \circ f$ そのもの
- 恒等射 $\mathrm{id}_{(A,\rho)} : (A, \rho) \to (A, \rho)$ は Rel における A 上の恒等射 id_A そのもの

4 PQt と $(-)^*$-Alg 間の関手の定義

本節では, PQt と $(-)^*$-Alg 間の関手の定義を説明する. はじめに, PQt から $(-)^*$-Alg への関手の定義を説明する. これ以降, べき集合クオンテールを $(\wp(A), \odot, U)$ と省略した形で表記することとする.

定義 4.1. PQt から $(-)^*$-Alg への関手 F を以下のように定義する.

- $F((\wp(A), \odot, U)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (A, \rho_{\odot,U})$
- ただし, $\rho_{\odot,U}$ は A^* から A への二項関係で, 以下のように帰納的に定義する.
$(\varepsilon, a) \in \rho \stackrel{\mathrm{def}}{\iff} a \in U$
$((a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}), a) \in \rho_{\odot,U} \stackrel{\mathrm{def}}{\iff} \exists x \in A, ((a_1, a_2, \cdots, a_n), x) \in \rho_{\odot,U}$ かつ $a \in \{x\} \odot \{a_{n+1}\}$

と定義する.

f を PQt における $(\wp(A), \odot, U)$ から $(\wp(A'), \odot', U')$ への射とし, $F(f)$ を以下のように定義する.

- $F(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(a, a') | a' \in f(\{a\})\}$

次に $(-)^*$-Alg から PQt への関手 G の定義を説明する.

定義 4.2. $(-)^*$-Alg から PQt への関手 G を以下のように定義する. ただし, (A, ρ) は $(-)^*$- 代数で, X, Y は $\wp(A)$ の任意の要素とする.

- $G((A, \rho)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\wp(A), \odot_\rho, U_\rho)$
- $X \odot_\rho Y \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{c | \exists a \in X, \exists b \in Y, ((a, b), c) \in \rho\}$
- $U_\rho \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{u | (\varepsilon, u) \in \rho\}$

R を $(-)^*$-Alg における (A, ρ) から (A', ρ') への射とし, $X \in \wp(A)$ とすると $G(R)(X)$ を以下のように定義する.

- $G(R)(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{a' | \exists a \in X, (a, a') \in R\}$

定義した圏と関手の関係を表すと図 1 のようになる.

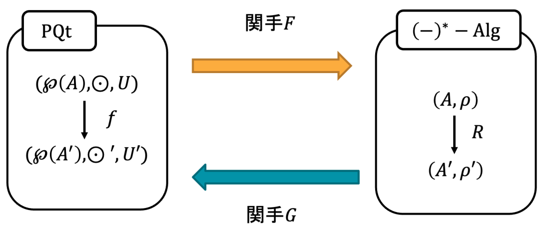

図 1　定義した圏と関手の関係

最後に, 同型関手の定義を説明する. 上記で説明した関手 F, G が以下の条件を満たすことを証明することが本研究の目標である.

定義 4.3 (同型関手)**.** 圏 X から圏 Y への関手 F が

同型関手であるとは，Y から X への関手 G が存在し、X の任意の対象 x について $G(F(x)) = x$,X の任意の射 f について $G(F(f)) = f$,Y の任意の対象 y について $F(G(y)) = y$,Y の任意の射 g について $F(G(g)) = g$ を満たすこと．

5　PQt から $(-)^*$-Alg への関手 F の証明

本節では，4 節で定義した PQt から $(-)^*$-Alg への F が関手であることを証明する．即ち，PQt の対象と射を F で $(-)^*$-Alg に写した対象と射が，それぞれ，$(-)^*$- 代数と $(-)^*$- 準同型であることと，F が合成射と恒等射を保つことの証明をする．

F と $(-)^*$-Alg の対象と射の関係を表すと図 2 のようになる．

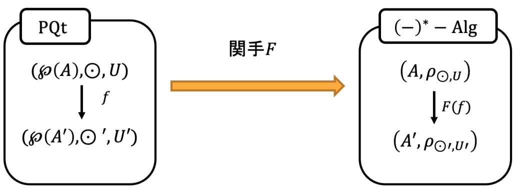

図 2　F と $(-)^*$-Alg の関係

補題 5.1. $(\wp(A),\odot,U)$ を任意のべき集合クオンテールとする．任意の $X \in \wp(A)$,$Y \in \wp(A)$,$z \in X \odot Y$,$z \in Y \odot X$ に対し，

$z \in X \odot Y \Leftrightarrow \exists x \in X, z \in \{x\} \odot Y$,

$z \in Y \odot X \Leftrightarrow \exists x \in X, z \in Y \odot \{x\}$,

が成り立つ．

Proof.

$$\begin{aligned}
&\exists x \in X, z \in \{x\} \odot Y \\
\Leftrightarrow & z \in \cup\{\{x\} \odot Y | x \in X\} \\
\Leftrightarrow & z \in (\cup\{\{x\}| x \in X\}) \odot Y \\
\Leftrightarrow & z \in X \odot Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\exists x \in X, z \in Y \odot \{x\} \\
\Leftrightarrow & z \in \cup\{Y \odot \{x\} | x \in X\} \\
\Leftrightarrow & z \in Y \odot (\cup\{\{x\}| x \in X\}) \\
\Leftrightarrow & z \in Y \odot X
\end{aligned}$$

□

補題 5.2. $(\wp(A),\odot,U)$ を任意のべき集合クオンテールとする．任意の $X \in \wp(A)$,$a \in X$ に対し，

$a \in X \Leftrightarrow \exists u \in U, a \in X \odot \{u\}$,

$a \in X \Leftrightarrow \exists u \in U, a \in \{u\} \odot X$

が成り立つ．

Proof.

$$\begin{aligned}
&a \in X \\
\Leftrightarrow & a \in X \odot U \\
\Leftrightarrow & \exists u \in U, a \in X \odot \{u\} \quad (\text{補題 } 5.1\text{より})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a \in X \\
\Leftrightarrow & a \in U \odot X \\
\Leftrightarrow & \exists u \in U, a \in \{u\} \odot X \quad (\text{補題 } 5.1\text{より})
\end{aligned}$$

□

補題 5.3. f を $(\wp(A),\odot,U)$ から $(\wp(A'),\odot',U')$ への任意の単位的準同型とする．任意の $X \in \wp(A)$,$z \in A'$ に対し，

$z \in f(X) \Leftrightarrow \exists x \in X, z \in f(\{x\})$

が成り立つ．

Proof.

$$\begin{aligned}
&z \in f(X) \\
\Leftrightarrow & z \in f(\cup\{\{x\}| x \in X\}) \\
\Leftrightarrow & z \in \cup\{f(\{x\})| x \in X\} \\
\Leftrightarrow & \exists x \in X, z \in f(\{x\})
\end{aligned}$$

□

命題 5.4. $(\wp(A),\odot,U)$ を任意のべき集合クオンテールとする．$(\wp(A),\odot,U)$ を関手 F で写した $(A,\rho_{\odot,U})$

は $\rho_{\odot,U} \circ \eta_A = \mathrm{id}_A$ を満たす.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & A^* \arrow[d, "\rho_{\odot,U}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Proof. 任意の要素 $a_1, x_2 \in A$ について,
$(a_1, x_2) \in \rho_{\odot,U} \circ \eta_A \Leftrightarrow (a_1, x_2) \in \mathrm{id}_A$ を示す.

$$\begin{aligned}
&(a_1, x_2) \in \rho_{\odot,U} \circ \eta_A \\
\Leftrightarrow& \exists \alpha \in A^*, (a_1, \alpha) \in \eta_A, (\alpha, x_2) \in \rho_{\odot,U} \\
\Leftrightarrow& ((a_1), x_2) \in \rho_{\odot,U} \\
\Leftrightarrow& \exists x_1 \in U, x_2 \in \{x_1\} \odot \{a_1\} \\
\Leftrightarrow& x_2 \in \{a_1\} \quad (\text{補題 5.2より}) \\
\Leftrightarrow& a_1 = x_2 \\
\Leftrightarrow& (a_1, x_2) \in \mathrm{id}_A
\end{aligned}$$

□

補題 5.5. 任意の $s \in A^*, v \in A^*, x \in A$ に対し, $((s,v),x) \in \rho_{\odot,U} \circ \mu_A \Leftrightarrow \exists a \in A, (v,a) \in \rho_{\odot,U}, ((s_1, s_2, \cdots, s_r, a), x) \in \rho_{\odot,U}$(ただし, $r = |s|$)

Proof. v の長さに関する帰納法で示す.
(Base Step($|v| = 0$))

$$\begin{aligned}
&((s,\varepsilon),x) \in \rho_{\odot,U} \circ \mu_A \\
\Leftrightarrow& (s,x) \in \rho_{\odot,U} \\
\Leftrightarrow& \exists y \in A, (s,y) \in \rho_{\odot,U}, x \in \{y\} \\
\Leftrightarrow& \exists y \in A, \exists a \in U, (s,y) \in \rho_{\odot,U}, x \in \{y\} \odot \{a\} \\
&(\text{補題 5.2より}) \\
\Leftrightarrow& \exists a \in A, (\varepsilon, a) \in \rho_{\odot,U}, ((s_1, s_2, \cdots, s_r, a), x) \in \rho_{\odot,U}
\end{aligned}$$

(Induction Step)
任意の q で $|v| = q$ となる任意の v で成り立つとき,
$|v| = q+1$ となる任意の v で成り立つことを示す.

$$\begin{aligned}
&((s,v),x) \in \rho_{\odot,U} \circ \mu_A \\
\Leftrightarrow& ((s_1, s_2, \cdots, s_r, v_1, v_2, \cdots, v_q, v_{q+1}), x) \in \rho_{\odot,U} \\
\Leftrightarrow& \exists z \in A, ((s_1, s_2, \cdots, s_r, v_1, v_2, \cdots, v_q), z) \in \rho_{\odot,U}, \\
&x \in \{z\} \odot \{v_{q+1}\} \\
\Leftrightarrow& \exists z \in A, ((s, (v_1, v_2, \cdots, v_q)), z) \in \rho_{\odot,U} \circ \mu_A, \\
&x \in \{z\} \odot \{v_{q+1}\} \\
\Leftrightarrow& \exists z \in A, \exists b \in A, ((v_1, v_2, \cdots, v_q), b) \in \rho_{\odot,U}, \\
&((s_1, s_2, \cdots, s_r, b), z) \in \rho_{\odot,U}, x \in \{z\} \odot \{v_{q+1}\} \\
&(\text{帰納法の仮定より}) \\
\Leftrightarrow& \exists y \in A, \exists b \in A, (s,y) \in \rho_{\odot,U}, \\
&((v_1, v_2, \cdots, v_q), b) \in \rho_{\odot,U}, \\
&\exists z \in A, z \in \{y\} \odot \{b\}, x \in \{z\} \odot \{v_{q+1}\} \\
\Leftrightarrow& \exists y \in A, \exists b \in A, (s,y) \in \rho_{\odot,U}, \\
&((v_1, v_2, \cdots, v_q), b) \in \rho_{\odot,U}, \\
&x \in (\{y\} \odot \{b\}) \odot \{v_{q+1}\} \\
&(\text{補題 5.1より}) \\
\Leftrightarrow& \exists y \in A, \exists b \in A, (s,y) \in \rho_{\odot,U}, \\
&((v_1, v_2, \cdots, v_q), b) \in \rho_{\odot,U}, \\
&x \in \{y\} \odot (\{b\} \odot \{v_{q+1}\}) \\
\Leftrightarrow& \exists y \in A, \exists a \in A, (s,y) \in \rho_{\odot,U}, \exists b \in A, \\
&((v_1, v_2, \cdots, v_q), b) \in \rho_{\odot,U}, \\
&a \in \{b\} \odot \{v_{q+1}\}, x \in \{y\} \odot \{a\} \\
&(\text{補題 5.1より}) \\
\Leftrightarrow& \exists y \in A, \exists a \in A, (s,y) \in \rho_{\odot,U}, \\
&((v_1, v_2, \cdots, v_{q+1}), a) \in \rho_{\odot,U}, \\
&x \in \{y\} \odot \{a\} \\
\Leftrightarrow& \exists a \in A, (v,a) \in \rho_{\odot,U}, ((s_1, s_2, \cdots, s_r, a), x) \in \rho_{\odot,U}
\end{aligned}$$

□

命題 5.6. $(\wp(A), \odot, U)$ を任意のべき集合クオンテールとする. $(\wp(A), \odot, U)$ を F で写した $(A, \rho_{\odot,U})$ は $\rho_{\odot,U} \circ \mu_A = \rho_{\odot,U} \circ \rho^*_{\odot,U}$ を満たす.

$$\begin{tikzcd} (A^*)^* \arrow[r, "\rho^*_{\odot,U}"] \arrow[d, "\mu_A"'] & A^* \arrow[d, "\rho_{\odot,U}"] \\ A^* \arrow[r, "\rho_{\odot,U}"'] & A \end{tikzcd}$$

Proof. 任意の $t \in (A^*)^*$ について任意の $x \in A$ で $(t,x) \in \rho_{\odot,U} \circ \mu_A$ と $(t,x) \in \rho_{\odot,U} \circ \rho^*_{\odot,U}$ が同値になることを t の長さ $|t|$ に関する帰納法で示す.
(Base Step($|t| = 0$))

$t=\varepsilon$ である．

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon,x)\in\rho_{\odot,U}\circ\mu_A\\
\Leftrightarrow&\exists s\in A^*,(\varepsilon,s)\in\mu_A,(s,x)\in\rho_{\odot,U}\\
\Leftrightarrow&(\varepsilon,x)\in\rho_{\odot,U}\\
\Leftrightarrow&\exists s\in A^*,(\varepsilon,s)\in\rho^*_{\odot,U},(s,x)\in\rho_{\odot,U}\\
\Leftrightarrow&(\varepsilon,x)\in\rho_{\odot,U}\circ\rho^*_{\odot,U}
\end{aligned}
$$

(Induction Step)

$|t|=p$ について成り立つと仮定する．つまり，任意の $x\in A$ について

$(t,x)\in\rho_{\odot,U}\circ\mu_A\Leftrightarrow(t,x)\in\rho_{\odot,U}\circ\rho^*_{\odot,U}$ とする．

v を A^* の任意の要素 $(|v|=q)$ とし，

$$
\begin{aligned}
&((t_1,t_2,\cdots,t_p,v),x)\in\rho_{\odot,U}\circ\mu_A\\
\Leftrightarrow&(((t_1,t_2,\cdots,t_p),(v)),x)\in\rho_{\odot,U}\circ\mu_A\circ\mu_{A^*}\\
\Leftrightarrow&(((t_1,t_2,\cdots,t_p),(v)),x)\in\rho_{\odot,U}\circ\mu_A\circ(\mu_A)^*\\
\Leftrightarrow&\exists s,u\in A^*,((t_1,t_2,\cdots,t_p),s)\in\mu_A,((v),u)\in\mu_A,\\
&((s,u),x)\in\rho_{\odot,U}\circ\mu_A\\
\Leftrightarrow&\exists s,u\in A^*,((t_1,t_2,\cdots,t_p),s)\in\mu_A,v=u,\\
&((s,u),x)\in\rho_{\odot,U}\circ\mu_A\\
\Leftrightarrow&\exists s\in A^*,((t_1,t_2,\cdots,t_p),s)\in\mu_A,\\
&((s,v),x)\in\rho_{\odot,U}\circ\mu_A\\
\Leftrightarrow&\exists s\in A^*,|s|=r,((t_1,t_2,\cdots,t_p),s)\in\mu_A,\exists a\in A,\\
&(v,a)\in\rho_{\odot,U},((s_1,s_2,\cdots s_r,a),x)\in\rho_{\odot,U}\\
&(\text{補題 5.5より})\\
\Leftrightarrow&\exists s\in A^*,|s|=r,((t_1,t_2,\cdots,t_p),s)\in\mu_A,\exists a\in A,\\
&(v,a)\in\rho_{\odot,U},\exists y\in A,(s,y)\in\rho_{\odot,U},x\in\{y\}\odot\{a\}\\
\Leftrightarrow&\exists a\in A,\exists y\in A,(t,y)\in\rho_{\odot,U}\circ\mu_A,(v,a)\in\rho_{\odot,U},\\
&x\in\{y\}\odot\{a\}\\
\Leftrightarrow&\exists a\in A,\exists y\in A,(t,y)\in\rho_{\odot,U}\circ\rho^*_{\odot,U},(v,a)\in\rho_{\odot,U},\\
&x\in\{y\}\odot\{a\}\\
&(\text{帰納法の仮定より})\\
\Leftrightarrow&\exists w\in A^*,\exists a\in A,|w|=p,(t,w)\in\rho^*_{\odot,U},(v,a)\in\rho_{\odot,U},\\
&\exists y\in A,((w_1,w_2,\cdots,w_p),y)\in\rho_{\odot,U},\\
&x\in\{y\}\odot\{a\}\\
\Leftrightarrow&\exists w\in A^*,\exists a\in A,|w|=p,(t,w)\in\rho^*_{\odot,U},(v,a)\in\rho_{\odot,U},\\
&((w_1,w_2,\cdots,w_p,a),x)\in\rho_{\odot,U}\\
\Leftrightarrow&\exists w\in A^*,\exists a\in A,|w|=p,\\
&(t_1,w_1)\in\rho_{\odot,U},(t_2,w_2)\in\rho_{\odot,U},\cdots,(t_p,w_p)\in\rho_{\odot,U},\\
&(v,a)\in\rho_{\odot,U},((w_1,w_2,\cdots,w_p,a),x)\in\rho_{\odot,U}\\
\Leftrightarrow&\exists w\in A^*,\exists a\in A,|w|=p,\\
&((t_1,t_2,\cdots t_p,v),(w_1,w_2,\cdots,w_p,a))\in\rho^*_{\odot,U},\\
&((w_1,w_2,\cdots,w_p,a),x)\in\rho_{\odot,U}\\
\Leftrightarrow&((t_1,t_2,\cdots,t_p,v),x)\in\rho_{\odot,U}\circ\rho^*_{\odot,U}
\end{aligned}
$$

□

よって，任意のべき集合クオンテール $(\wp(A),\odot,U)$ に対し，$(A,\rho_{\odot,U})$ が $(-)^*$- 代数であることが示された．

任意の単位的準同型 f に対し，$F(f)$ が $(-)^*$- 準同型であることを以下の命題で示す．

命題 5.7. f を $(\wp(A),\odot,U)$ から $(\wp(A'),\odot',U')$ への任意の単位的準同型とする．f は $F(f)\circ\rho_{\odot,U}=\rho_{\odot',U'}\circ F(f)^*$ を満たす．

$$
\begin{tikzcd}
A^* \arrow[r, "F(f)^*"] \arrow[d, "\rho_{\odot,U}"'] & A'^* \arrow[d, "\rho_{\odot',U'}"] \\
A \arrow[r, "F(f)"'] & A'
\end{tikzcd}
$$

Proof. 任意の $\alpha\in A^*$ について任意の $a'\in A'$ で $(\alpha,a')\in F(f)\circ\rho_{\odot,U}$ と $(\alpha,a')\in\rho_{\odot',U'}\circ F(f)^*$ が同値になることを $|\alpha|$ に関する帰納法で示す．

Base Step($|\alpha|=0$)

$|\alpha|=\varepsilon$ である．

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon,a')\in F(f)\circ\rho_{\odot,U}\\
\Leftrightarrow&\exists a\in A,(\varepsilon,a)\in\rho_{\odot,U},(a,a')\in F(f)\\
\Leftrightarrow&\exists a\in A,(\varepsilon,a)\in\rho_{\odot,U},a'\in f(\{a\})\\
\Leftrightarrow&\exists a\in U,a'\in f(\{a\})\\
\Leftrightarrow&a'\in f(U)\quad(\text{補題 5.3より})
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow a' \in U'$

$\Leftrightarrow (\varepsilon, a') \in \rho_{\odot', U'}$

$\Leftrightarrow \exists \alpha' \in A'^*, (\varepsilon, \alpha') \in F(f)^*, (\alpha', a') \in \rho_{\odot', U'}$

$\Leftrightarrow (\varepsilon, a') \in \rho_{\odot', U'} \circ F(f)^*$

(Induction Step)

$|\alpha| = k$ について成り立つと仮定する．つまり

$$((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k), a'_{k+1}) \in F(f) \circ \rho_{\odot, U}$$
$$\Leftrightarrow ((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k), a'_{k+1}) \in \rho_{\odot', U'} \circ F(f)^*$$

とする．

任意の $\alpha_{k+1} \in A, a'_{k+2} \in A$ について，

$((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k+1}), a'_{k+2}) \in F(f) \circ \rho_{\odot, U}$

$\Leftrightarrow \exists a_{k+2} \in A, ((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k+1}), a_{k+2}) \in \rho_{\odot, U}$,
$(a_{k+2}, a'_{k+2}) \in F(f)$

$\Leftrightarrow \exists a_{k+2} \in A, ((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k+1}), a_{k+2}) \in \rho_{\odot, U}$,
$a'_{k+2} \in f(\{a_{k+2}\})$

$\Leftrightarrow \exists a_{k+2} \in A, \exists a_{k+1} \in A$,
$((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k), a_{k+1}) \in \rho_{\odot, U}$かつ
$a_{k+2} \in \{a_{k+1}\} \odot \{\alpha_{k+1}\}, a'_{k+2} \in f(\{a_{k+2}\})$

$\Leftrightarrow \exists a_{k+1} \in A, ((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k), a_{k+1}) \in \rho_{\odot, U}$,
$a'_{k+2} \in f(\{a_{k+1}\} \odot \{\alpha_{k+1}\})$
(補題 5.3より)

$\Leftrightarrow \exists a_{k+1} \in A, ((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k), a_{k+1}) \in \rho_{\odot, U}$,
$\exists a'_{k+1} \in f(\{a_{k+1}\}), a'_{k+2} \in \{a'_{k+1}\} \odot' f(\{\alpha_{k+1}\})$
(補題 5.1より)

$\Leftrightarrow \exists a_{k+1} \in A, ((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k), a_{k+1}) \in \rho_{\odot, U}$,
$\exists a'_{k+1} \in f(\{a_{k+1}\}), \exists \alpha'_{k+1} \in f(\{\alpha_{k+1}\})$,
$a'_{k+2} \in \{a'_{k+1}\} \odot' \{\alpha'_{k+1}\}$
(補題 5.1より)

$\Leftrightarrow \exists a'_{k+1} \in A', \exists a_{k+1} \in A$,
$((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k), a_{k+1}) \in \rho_{\odot, U}$,
$(a_{k+1}, a'_{k+1}) \in F(f), \exists \alpha'_{k+1} \in A'$,
$a'_{k+2} \in \{a'_{k+1}\} \odot' \{\alpha'_{k+1}\}, (\alpha_{k+1}, \alpha'_{k+1}) \in F(f)$

$\Leftrightarrow \exists a'_{k+1} \in A', ((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k), a'_{k+1}) \in F(f) \circ \rho_{\odot, U}$,
$\exists \alpha'_{k+1} \in A', a'_{k+2} \in \{a'_{k+1}\} \odot' \{\alpha'_{k+1}\}$,
$(\alpha_{k+1}, \alpha'_{k+1}) \in F(f)$

$\Leftrightarrow \exists a'_{k+1} \in A', \exists \alpha'_{k+1} \in A'$,
$((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k), a'_{k+1}) \in \rho_{\odot', U'} \circ F(f)^*$,
$a'_{k+2} \in \{a'_{k+1}\} \odot' \{\alpha'_{k+1}\}, (\alpha_{k+1}, \alpha'_{k+1}) \in F(f)$
(帰納法の仮定より)

$\Leftrightarrow \exists (\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_{k+1}) \in A'^*, \exists a'_{k+1} \in A'$,
$((\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_k), a'_{k+1}) \in \rho_{\odot', U'}$
かつ $a'_{k+2} \in \{a'_{k+1}\} \odot' \{\alpha'_{k+1}\}$,
$((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k), (\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_k)) \in F(f)^*$,
$(\alpha_{k+1}, \alpha'_{k+1}) \in F(f)$

$\Leftrightarrow \exists (\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_{k+1}) \in A'^*$,
$((\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_{k+1}), a'_{k+2}) \in \rho_{\odot', U'}$,
$((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k), (\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_k)) \in F(f)^*$,
$(\alpha_{k+1}, \alpha'_{k+1}) \in F(f)$

$\Leftrightarrow \exists (\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_{k+1}) \in A'^*$,
$((\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_{k+1}), a'_{k+2}) \in \rho_{\odot', U'}$,
$(\alpha_1, \alpha'_1,) \in F(f)$,
$(\alpha_2, \alpha'_2,) \in F(f), \cdots (\alpha_{k+1}, \alpha'_{k+1},) \in F(f)$

$\Leftrightarrow \exists (\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_{k+1}) \in A'^*$,
$((\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_{k+1}), a'_{k+2}) \in \rho_{\odot', U'}$,
$((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k+1}), (\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_{k+1})) \in F(f)^*$

$\Leftrightarrow ((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k+1}), a'_{k+2}) \in \rho_{\odot', U'} \circ F(f)^*$

□

よって，任意の単位的準同型 f に対し，$F(f)$ が $(-)^*$- 準同型であることが示された．

命題 5.8. f を $(\wp(A), \odot, U)$ から $(\wp(A'), \odot', U')$ への任意の単位的準同型とし，g を $(\wp(A'), \odot', U')$ から $(\wp(A''), \odot'', U'')$ への任意の単位的準同型とする．F は $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ を満たす．

Proof. 任意の要素 $a \in A, a'' \in A''$ について，$(a, a'') \in F(g \circ f) \Leftrightarrow (a, a'') \in F(g) \circ F(f)$ を示す．

$$
\begin{aligned}
&(a, a'') \in F(g \circ f) \\
\Leftrightarrow& a'' \in (g \circ f)(\{a\}) \\
\Leftrightarrow& a'' \in g(f(\{a\})) \\
\Leftrightarrow& \exists a' \in f(\{a\}), a'' \in g(\{a'\}) \\
&(\text{補題 5.3より}) \\
\Leftrightarrow& \exists a' \in A, (a, a') \in F(f), (a', a'') \in F(g) \\
\Leftrightarrow& (a, a'') \in F(g) \circ F(f)
\end{aligned}
$$

□

命題 5.9. $(\wp(A), \odot, U)$ を任意のべき集合クオンテールとする．F は $F(\mathrm{id}_{(\wp(A),\odot,U)}) = \mathrm{id}_{F(\wp(A),\odot,U)}$ を満たす．

Proof. 任意の要素 $a, a' \in A$ について，$(a, a') \in F(\mathrm{id}_{(\wp(A),\odot,U)}) \Leftrightarrow (a, a') \in \mathrm{id}_{F(\wp(A),\odot,U)}$ を示す．

$$
\begin{aligned}
&(a, a') \in F(\mathrm{id}_{(\wp(A),\odot,U)}) \\
\Leftrightarrow& a \in A, a' \in \mathrm{id}_{(\wp(A),\odot,U)}(\{a\}) \\
\Leftrightarrow& a \in A, a' \in \{a\} \\
\Leftrightarrow& a \in A, a' = a \\
\Leftrightarrow& (a, a') \in \mathrm{id}_{(A,\rho_\odot,U)} \\
\Leftrightarrow& (a, a') \in \mathrm{id}_{F(\wp(A),\odot,U)}
\end{aligned}
$$

□

命題 5.10. F は PQt から $(-)^*$-Alg への関手である．

Proof. 命題 5.4，命題 5.6，命題 5.7，命題 5.8，命題 5.9 より，F は PQt から $(-)^*$-Alg への関手であると示された． □

6 $(-)^*$-Alg から PQt への関手 G の証明

本節では，4 節で定義した $(-)^*$-Alg から PQt への G が関手であることを証明する．即ち，$(-)^*$-Alg の対象と射を G で写した対象と射が，それぞれ，べき集合クオンテールと単位的準同型であることと，G が合成射と恒等射を保つことの証明をする．

G と PQt の対象と射の関係を表すと図 3 のようになる．

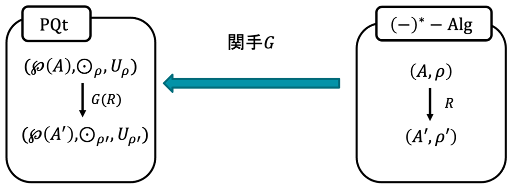

図 3　G と PQt の関係

補題 6.1. (A, ρ) が任意の $(-)^*$- 代数のとき，任意の $a \in A$ について $((a), a) \in \rho$

Proof. A の任意の要素を a とおく．(A, ρ) が $(-)^*$-代数であることと，id_A の定義より，$(a, a) \in \rho \circ \eta_A$ である．合成の定義より，$\exists b, (b, a) \in \rho, (a, b) \in \eta_A$ である．η_A の定義より $b = (a)$ である．よって，$((a), a) \in \rho$ □

補題 6.2. (A, ρ) が任意の $(-)^*$- 代数のとき，任意の $a, a' \in A$ について $((a), a') \in \rho$ ならば $a = a'$

Proof. A の任意の要素を a, a' とおく．(A, ρ) が $(-)^*$- 代数であることと，仮定の $((a), a') \in \rho$ と $(a, (a)) \in \eta_A$ より $(a, a') \in \mathrm{id}_A$ とわかる．id_A の定義より $a = a'$ □

任意の $(-)^*$- 代数 (A, ρ) に対し，$(\wp(A), \odot_\rho, U_\rho)$ がべき集合クオンテールであることを以下の命題で示す．

命題 6.3. (A, ρ) を任意の $(-)^*$- 代数とする．(A, ρ) を G で写した $(\wp(A), \odot_\rho, U_\rho)$ はモノイドである．

Proof. $\wp(A)$ の任意の要素を P, Q, R, T とおく．モノイドであるためには $(P \odot_\rho Q) \odot_\rho R = P \odot_\rho (Q \odot_\rho R)$ と $T \odot_\rho U_\rho = T = U_\rho \odot_\rho T$ であればよい．

まず，$(P \odot_\rho Q) \odot_\rho R = P \odot_\rho (Q \odot_\rho R)$ を示す．A の任意の要素を c とおく．

$$
\begin{aligned}
&c \in (P \odot_\rho Q) \odot_\rho R \\
\Leftrightarrow& \exists b \in (P \odot_\rho Q), \exists r \in R, ((b, r), c) \in \rho \\
\Leftrightarrow& \exists b \in A, \exists p \in P, \exists q \in Q, ((p, q), b) \in \rho, \\
&\exists r \in R, ((b, r), c) \in \rho
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow \exists p \in P, \exists q \in Q, \exists r \in R, \exists b \in A,$

$\exists s \in A, ((p,q),b) \in \rho, ((r),s) \in \rho, ((b,s),c) \in \rho$

(補題 6.1, 6.2より)

$\Leftrightarrow \exists p \in P, \exists q \in Q, \exists r \in R, \exists x \in A^*,$

$(((p,q),(r)),x) \in \rho^*, (x,c) \in \rho$

$\Leftrightarrow \exists p \in P, \exists q \in Q, \exists r \in R, (((p,q),(r)),c) \in \rho \circ \rho^*$

$\Leftrightarrow \exists p \in P, \exists q \in Q, \exists r \in R, (((p,q),(r)),c) \in \rho \circ \mu_A$

$\Leftrightarrow \exists p \in P, \exists q \in Q, \exists r \in R, ((p,q,r),c) \in \rho$

$\Leftrightarrow \exists p \in P, \exists q \in Q, \exists r \in R, (((p),(q,r)),c) \in \rho \circ \mu_A$

$\Leftrightarrow \exists p \in P, \exists q \in Q, \exists r \in R, (((p),(q,r)),c) \in \rho \circ \rho^*$

$\Leftrightarrow \exists p \in P, \exists q \in Q, \exists r \in R, \exists y \in A^*,$

$(((p),(q,r)),y) \in \rho^*, (y,c) \in \rho$

$\Leftrightarrow \exists p \in P, \exists q \in Q, \exists r \in R, \exists t \in A, \exists d \in A,$

$((p),t) \in \rho, ((q,r),d) \in \rho, ((t,d),c) \in \rho$

$\Leftrightarrow \exists p \in P, \exists d \in A, \exists q \in Q, \exists r \in R, ((q,r),d) \in \rho,$

$((p,d),c) \in \rho$

(補題 6.1, 6.2より)

$\Leftrightarrow \exists p \in P, \exists d \in Q \odot_\rho R, ((p,d),c) \in \rho$

$\Leftrightarrow c \in P \odot_\rho (Q \odot_\rho R)$

□

次に，$T \odot_\rho U_\rho = T = U_\rho \odot_\rho T$ を示す．A の任意の要素を e とおく．

Proof.

$e \in T \odot_\rho U_\rho$

$\Leftrightarrow \exists t \in T, \exists u \in U_\rho, ((t,u),e) \in \rho$

$\Leftrightarrow \exists t \in T, \exists u \in A, (\varepsilon,u) \in \rho, ((t,u),e) \in \rho$

$\Leftrightarrow \exists t \in T, \exists u \in A, (\varepsilon,u) \in \rho, ((t,u),e) \in \rho,$

$((t),t) \in \rho$

(補題 6.1より)

$\Leftrightarrow \exists t \in T, \exists u \in A, \exists s \in A, ((t),s) \in \rho, (\varepsilon,u) \in \rho,$

$((s,u),e) \in \rho$

(補題 6.2より)

$\Leftrightarrow \exists t \in T, \exists u \in A, \exists s \in A, (((t),\varepsilon),(s,u)) \in \rho^*,$

$((s,u),e) \in \rho$

$\Leftrightarrow \exists t \in T, (((t),\varepsilon),e) \in \rho \circ \rho^*$

$\Leftrightarrow \exists t \in T, (((t),\varepsilon),e) \in \rho \circ \mu_A$

$\Leftrightarrow \exists t \in T, ((t),e) \in \rho$

$\Leftrightarrow \exists t \in T, t = e$　(補題 6.1, 6.2より)

$\Leftrightarrow e \in T$

$e \in U_\rho \odot_\rho T$

$\Leftrightarrow \exists u \in U_\rho, \exists t \in T, ((u,t),e) \in \rho$

$\Leftrightarrow \exists u \in A, \exists t \in T, (\varepsilon,u) \in \rho, ((u,t),e) \in \rho$

$\Leftrightarrow \exists u \in A, \exists t \in T, (\varepsilon,u) \in \rho, ((u,t),e) \in \rho,$

$((t),t) \in \rho$

(補題 6.1より)

$\Leftrightarrow \exists u \in A, \exists t \in T, \exists s \in A, ((t),s) \in \rho, (\varepsilon,u) \in \rho,$

$((u,s),e) \in \rho$

(補題 6.2より)

$\Leftrightarrow \exists u \in A, \exists t \in T, \exists s \in A, ((\varepsilon,(t)),(u,s)) \in \rho^*,$

$((u,s),e) \in \rho$

$\Leftrightarrow \exists t \in T, ((\varepsilon,(t)),e) \in \rho \circ \rho^*$

$\Leftrightarrow \exists t \in T, ((\varepsilon,(t)),e) \in \rho \circ \mu_A$

$\Leftrightarrow \exists t \in T, ((t),e) \in \rho$

$\Leftrightarrow \exists t \in T, t = e$　(補題 6.1, 6.2より)

$\Leftrightarrow e \in T$

□

命題 6.4. (A,ρ) を任意の $(-)^*$- 代数とする．$\wp(A)$ の任意の部分集合 α と任意の要素 X に対し，

$(\cup\alpha) \odot_\rho X = \cup\{S \odot_\rho X | S \in \alpha\},$

$X \odot_\rho (\cup\alpha) = \cup\{X \odot_\rho S | S \in \alpha\}$

を満たす．

Proof. A の任意の要素を c とおく．

$$
\begin{aligned}
&c \in (\cup\alpha) \odot_\rho X \\
\Leftrightarrow &\exists s \in \cup\alpha, \exists x \in X, ((s,x),c) \in \rho \\
\Leftrightarrow &\exists S \in \alpha, \exists s \in S, \exists x \in X, ((s,x),c) \in \rho \\
\Leftrightarrow &\exists S \in \alpha, c \in S \odot_\rho X \\
\Leftrightarrow &c \in \cup\{S \odot_\rho X | S \in \alpha\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&c \in X \odot_\rho (\cup\alpha) \\
\Leftrightarrow &\exists x \in X, \exists s \in \cup\alpha, ((x,s),c) \in \rho \\
\Leftrightarrow &\exists x \in X, \exists S \in \alpha, \exists s \in S, ((x,s),c) \in \rho \\
\Leftrightarrow &\exists S \in \alpha, c \in X \odot_\rho S \\
\Leftrightarrow &c \in \cup\{X \odot_\rho S | S \in \alpha\}
\end{aligned}
$$

□

よって，任意の $(-)^*$- 代数 (A,ρ) に対し，$(\wp(A), \odot_\rho, U_\rho)$ がべき集合クオンテールであることが示された．

任意の $(-)^*$- 準同型 R に対し，$G(R)$ は単位的準同型であることを以下の命題で示す．

命題 6.5. R を (A,ρ) から (A',ρ') への $(-)^*$- 準同型とする．$\wp(A)$ の任意の部分集合 α に対し，$G(R)$ は $G(R)(\cup\alpha) = \cup\{G(R)(Y) | Y \in \alpha\}$ を満たす．

Proof. A' の任意の要素を a' とおく．

$$
\begin{aligned}
&a' \in G(R)(\cup\alpha) \\
\Leftrightarrow &\exists a \in \cup\alpha, (a,a') \in R \\
\Leftrightarrow &\exists Y \in \alpha, \exists a \in Y, (a,a') \in R \\
\Leftrightarrow &\exists Y \in \alpha, a' \in G(R)(Y) \\
\Leftrightarrow &a' \in \cup\{G(R)(Y) | Y \in \alpha\}
\end{aligned}
$$

□

命題 6.6. R を (A,ρ) から (A',ρ') への $(-)^*$- 準同型とする．$\wp(A)$ の任意の要素 Y,Z に対し，$G(R)$ は $G(R)(Y \odot_\rho Z) = G(R)(Y) \odot_{\rho'} G(R)(Z)$ を満たす．

Proof. A' の任意の要素を a' とおく．

$$
\begin{aligned}
&a' \in G(R)(Y \odot_\rho Z) \\
\Leftrightarrow &\exists a \in Y \odot_\rho Z, (a,a') \in R \\
\Leftrightarrow &\exists y \in Y, \exists z \in Z, \exists a \in A, ((y,z),a) \in \rho, (a,a') \in R \\
\Leftrightarrow &\exists y \in Y, \exists z \in Z, ((y,z),a') \in R \circ \rho \\
\Leftrightarrow &\exists y \in Y, \exists z \in Z, ((y,z),a') \in \rho' \circ R^* \\
\Leftrightarrow &\exists y \in Y, \exists z \in Z, \exists x' \in A'^*, ((y,z),x') \in R^*, \\
&(x',a') \in \rho' \\
\Leftrightarrow &\exists y \in Y, \exists z \in Z, \exists b,c \in A', ((y,z),(b,c)) \in R^*, \\
&((b,c),a') \in \rho' \\
\Leftrightarrow &\exists y \in Y, \exists z \in Z, \exists b,c \in A', (y,b) \in R, (z,c) \in R, \\
&((b,c),a') \in \rho' \\
\Leftrightarrow &\exists b \in G(R)(Y), \exists c \in G(R)(Z), ((b,c),a') \in \rho' \\
\Leftrightarrow &a' \in G(R)(Y) \odot_{\rho'} G(R)(Z)
\end{aligned}
$$

□

命題 6.7. R を (A,ρ) から (A',ρ') への $(-)^*$- 準同型とする．$\wp(A)$ の任意の単位元に対し，$G(R)$ は $G(R)(U_\rho) = U_{\rho'}$ を満たす．

Proof. A' の任意の要素を a' とおく．

$$
\begin{aligned}
&a' \in G(R)(U_\rho) \\
\Leftrightarrow &\exists u \in U_\rho, (u,a') \in R \\
\Leftrightarrow &\exists u \in A, (\varepsilon,u) \in \rho, (u,a') \in R \\
\Leftrightarrow &(\varepsilon,a') \in R \circ \rho \\
\Leftrightarrow &(\varepsilon,a') \in \rho' \circ R^* \\
\Leftrightarrow &\exists x' \in A'^*, (\varepsilon,x') \in R^*, (x',a') \in \rho' \\
\Leftrightarrow &(\varepsilon,\varepsilon) \in R^*, (\varepsilon,a') \in \rho' \\
\Leftrightarrow &(\varepsilon,a') \in \rho' \\
\Leftrightarrow &a' \in U_{\rho'}
\end{aligned}
$$

□

よって，任意の $(-)^*$- 準同型 R に対し，$G(R)$ は単位的準同型であることが示された．

命題 6.8. R,S を $(-)^*$- 準同型 $R : (A,\rho) \to (A',\rho'), S : (A',\rho') \to (A'',\rho'')$ とし，X を $\wp(A)$ の任意の要素とする．

G は $G(S \circ R)(X) = (G(S) \circ G(R))(X)$ を満たす.

Proof.
$(G(S) \circ G(R))(X)$
$= G(S)(G(R)(X))$
$= G(S)(\{a' | \exists a \in X, (a, a') \in R\})$
$= \{a'' | \exists a' \in \{a' | \exists a \in X, (a, a') \in R\}, (a', a'') \in S\}$
$= \{a'' | \exists a' \in A', \exists a \in X, (a, a') \in R, (a', a'') \in S\}$
$= \{a'' | \exists a \in X, (a, a'') \in S \circ R\}$
$= G(S \circ R)(X)$

□

命題 6.9. X を $\wp(A)$ の任意の要素とし，(A, ρ) を任意の $(-)^*$- 代数とする．G は $G(\mathrm{id}_{(A,\rho)})(X) = \mathrm{id}_{G(A,\rho)}(X)$ を満たす.

Proof.

$$
\begin{aligned}
&G(\mathrm{id}_{(A,\rho)})(X)\\
&= \{a' | \exists a \in X, (a, a') \in \mathrm{id}_{(A,\rho)})\}\\
&= \{a' | \exists a \in X, (a, a') \in \mathrm{id}_A\}\\
&= \{a' | \exists a \in X, a = a'\}\\
&= \{a' | a' \in X\}\\
&= X\\
&= \mathrm{id}_{G(A,\rho)}(X)
\end{aligned}
$$

□

命題 6.10. G は $(-)^*$-Alg から PQt への関手である.

Proof. 命題 6.3，命題 6.4，命題 6.5，命題 6.6，命題 6.7, 命題 6.8, 命題 6.9 より，G は $(-)^*$-Alg から PQt への関手であることが示された. □

7 同型関手の証明

本節では，4 節で定義した関手 F, G が同型関手であることを証明する.

命題 7.1. PQt の任意の対象 x に対し，G と F は $G(F(x)) = x$ を満たす.

Proof. PQt の任意の対象を $(\wp(A), \odot, U)$ とおく.

$$
\begin{aligned}
&G(F(\wp(A), \odot, U))\\
&= G((A, \rho_{\odot,U}))\\
&= (\wp(A), \odot_{\rho_{\odot,U}}, U_{\rho_{\odot,U}})
\end{aligned}
$$

$(\wp(A), \odot_{\rho_{\odot,U}}, U_{\rho_{\odot,U}})$ と $(\wp(A), \odot, U)$ が等しいと言えればよい.

X, Y を $\wp(A)$ の任意の要素とし，$X \odot_{\rho_{\odot,U}} Y = X \odot Y$ を示す.

$X \odot Y$
$=\{c | \exists a \in X, c \in \{a\} \odot Y\}$
(補題 5.1より)
$=\{c | \exists a \in X, \exists b \in Y, c \in \{a\} \odot \{b\}\}$
(補題 5.1より)
$=\{c | \exists a \in X, \exists b \in Y, \exists x_1 \in U, c \in \{x_1\} \odot (\{a\} \odot \{b\})\}$
(補題 5.2より)
$=\{c | \exists a \in X, \exists b \in Y, \exists x_1 \in U, c \in (\{x_1\} \odot \{a\}) \odot \{b\}\}$
$=\{c | \exists a \in X, \exists b \in Y, \exists x_1 \in U, \exists x_2 \in \{x_1\} \odot \{a\},$
$c \in \{x_2\} \odot \{b\}\}$
(補題 5.1より)
$=\{c | \exists a \in X, \exists b \in Y, ((a, b), c) \in \rho_{\odot,U}\}$
$=X \odot_{\rho_{\odot,U}} Y$

$U_{\rho_{\odot,U}} = U$ を示す.

$$
\begin{aligned}
&U_{\rho_{\odot,U}}\\
&=\{u | (\varepsilon, u) \in \rho_{\odot,U}\}\\
&=\{u | u \in U\}\\
&=U
\end{aligned}
$$

□

命題 7.2. f を $(\wp(A), \odot, U)$ から $(\wp(A)', \odot', U')$ への単位的準同型とする．f に対し，G と F は $G(F(f)) = f$ を満たす.

Proof. $G(F(f))$ は $\wp(A)$ から $\wp(A')$ への写像なので，$X \in \wp(A)$ に対し，$G(F(f))(X) = f(X)$ を示せばよい.

$$
\begin{aligned}
&f(X)\\
=&\{a'|\exists a \in X, a' \in f(\{a\})\} \quad (\text{補題 5.3より})\\
=&\{a'|\exists a \in X, (a, a') \in F(f)\}\\
=&G(F(f))(X)
\end{aligned}
$$

□

命題 7.3. $(-)^*$-Alg の任意の対象 y に対し，F と G は $F(G(y)) = y$ を満たす.

Proof. $(-)^*$-Alg の任意の対象を (A, ρ) とおく.

$$
\begin{aligned}
&F(G((A,\rho)))\\
=&F((\wp(A), \odot_\rho, U_\rho))\\
=&(A, \rho_{\odot_\rho, U_\rho})
\end{aligned}
$$

$\rho = \rho_{\odot_\rho, U_\rho}$ を示す．任意の 0 以上の整数 n と $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A^*$ と $x_{n+1} \in A$ について $((a_1, a_2, \cdots, a_n), x_{n+1}) \in \rho$ と $((a_1, a_2, \cdots, a_n), x_{n+1}) \in \rho_{\odot_\rho, U_\rho}$ が同値になることを n に関する帰納法で示す.

(Base Step($n = 0$))
$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \varepsilon$ である.

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon, x_1) \in \rho\\
&\Leftrightarrow x_1 \in U_\rho\\
&\Leftrightarrow (\varepsilon, x_1) \in \rho_{\odot_\rho, U_\rho}
\end{aligned}
$$

(Induction Step)
$n = k$ について成り立つと仮定する．つまり

$$
\begin{aligned}
&((a_1, a_2, \cdots, a_n), x_{k+1}) \in \rho\\
\Leftrightarrow&((a_1, a_2, \cdots, a_n), x_{k+1}) \in \rho_{\odot_\rho, U_\rho}
\end{aligned}
$$

とする.

$$
\begin{aligned}
&((a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}), x_{k+2}) \in \rho_{\odot_\rho, U_\rho}\\
\Leftrightarrow&\exists x_{k+1} \in A, ((a_1, a_2, \cdots, a_k), x_{k+1}) \in \rho_{\odot_\rho, U_\rho},\\
&x_{k+2} \in \{x_{k+1}\} \odot_\rho \{a_{k+1}\}\\
\Leftrightarrow&\exists x_{k+1} \in A, ((a_1, a_2, \cdots, a_k), x_{k+1}) \in \rho,\\
&x_{k+2} \in \{x_{k+1}\} \odot_\rho \{a_{k+1}\}\\
&(\text{帰納法の仮定より})\\
\Leftrightarrow&\exists x_{k+1} \in A, ((a_1, a_2, \cdots, a_k), x_{k+1}) \in \rho,\\
&((x_{k+1}, a_{k+1}), x_{k+2}) \in \rho\\
\Leftrightarrow&\exists x_{k+1} \in A, \exists a \in A, ((a_1, a_2, \cdots a_k), x_{k+1}) \in \rho,\\
&((a_{k+1}), a) \in \rho, ((x_{k+1}, a), x_{k+2}) \in \rho\\
&(\text{補題 } 6.1, 6.2\text{より})\\
\Leftrightarrow&\exists x_{k+1} \in A, \exists a \in A, (((a_1, a_2, \cdots, a_k), (a_{k+1})),\\
&(x_{k+1}, a)) \in \rho^*, ((x_{k+1}, a), x_{k+2}) \in \rho\\
\Leftrightarrow&(((a_1, a_2, \cdots, a_k), (a_{k+1})), x_{k+2}) \in \rho \circ \rho^*\\
\Leftrightarrow&(((a_1, a_2, \cdots, a_k), (a_{k+1})), x_{k+2}) \in \rho \circ \mu_A\\
\Leftrightarrow&((a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}), x_{k+2}) \in \rho
\end{aligned}
$$

□

命題 7.4. R を (A, ρ) から (A', ρ') への $(-)^*$- 準同型とする．F と G は $F(G(R)) = R$ を満たす.

Proof.

$$
\begin{aligned}
&F(G(R))\\
=&\{(a, a')|a' \in G(R)(\{a\})\}\\
=&\{(a, a')|\exists a'' \in \{a\}, (a'', a') \in R\}\\
=&\{(a, a')|(a, a') \in R\}\\
=&R
\end{aligned}
$$

□

命題 7.5. F は PQt から $(-)^*$-Alg への同型関手である.

Proof. 命題 7.1，命題 7.2，命題 7.3，命題 7.4 より，F は PQt から $(-)^*$-Alg への同型関手であることが示された. □

定理 7.6. PQt と $(-)^*$-Alg は同型である.

8 $(-)^*$-Alg はアイレンベルグムーア圏

本節では，3 節で定義した圏 $(-)^*$-Alg が Rel 上のモナド $(-)^*$ のアイレンベルグムーア圏であることを述べる．モナド，アイレンベルグムーア圏は以下のように定義されるものである [4].

定義 8.1 (モナド)**.** 圏 C 上のモナドとは組 (T, μ, η)

で以下を満たすもののこと．

- T は C から C への関手
- μ は合成関手 $T \circ T$ から T への自然変換
- η は恒等関手 Id_C から T への自然変換
- C の任意の対象 A に対し以下の 3 つを満たす
  - $\mu_A \circ \mu_{T(A)} = \mu_A \circ T(\mu_A)$

$$\begin{tikzcd} T(T(T(A))) \arrow[r, "T(\mu_A)"] \arrow[d, "\mu_{T(A)}"'] & T(T(A)) \arrow[d, "\mu_A"] \\ T(T(A)) \arrow[r, "\mu_A"'] & T(A) \end{tikzcd}$$

  - $\mu_A \circ \eta_{T(A)} = \mathrm{id}_{T(A)}$

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "\eta_{T(A)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{T(A)}"'] & T(T(A)) \arrow[d, "\mu_A"] \\ & T(A) \end{tikzcd}$$

  - $\mu_A \circ T(\eta_A) = \mathrm{id}_{T(A)}$

$$\begin{tikzcd} T(T(A)) \arrow[d, "\mu_A"'] & T(A) \arrow[l, "T(\eta_A)"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_{T(A)}"] \\ T(A) & \end{tikzcd}$$

定義 8.2 (アイレンベルグムーア圏)**.** 圏 C 上のモナド T に対しアイレンベルグムーア圏 T-Alg とは C と T により決まる圏で以下により定義されるもの．

圏 C 上のモナド (T, μ, η) のアイレンベルグムーア圏 T-Alg とは以下の圏のこと．

- T-Alg の対象は T 代数とする．即ち，組 (A, h) であり，かつ
  - A は C の対象
  - h は C の射 $h : T(A) \to A$
  - $h \circ \mu_A = h \circ T(h)$

$$\begin{tikzcd} T(T(A)) \arrow[r, "T(h)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T(A) \arrow[d, "h"] \\ T(A) \arrow[r, "h"'] & A \end{tikzcd}$$

  - $h \circ \eta_A = \mathrm{id}_A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & T(A) \arrow[d, "h"] \\ & A \end{tikzcd}$$

- T-Alg の対象 (A, h) から (B, k) への射 f とは，T 準同型とする．即ち，C での射 $f : A \to B$ であり，かつ $f \circ h = k \circ T(f)$ を満たすもの

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "h"'] & T(B) \arrow[d, "k"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

- 射 $f : (A, h) \to (B, k)$ と $g : (B, k) \to (D, l)$ の合成 $g \circ f$ は C における $g \circ f$ そのもの
- 恒等射 $\mathrm{id}_{(A,h)} : (A, h) \to (A, h)$ は C における A 上の恒等射 id_A そのもの

証明は本論文では省略するが，以下のことが確かめられる．

命題 8.3. 定義 3.2 の $((-)^*, \mu, \eta)$ は Rel 上のモナドである．

命題 8.4. 定義 3.3 の $(-)^*$-Alg は Rel 上のモナド $(-)^*$ のアイレンベルグムーア圏である．

PQt が $(-)^*$-Alg と同型であることと，$(-)^*$-Alg が Rel 上のモナドのアイレンベルグムーア圏であることがわかった．アイレンベルグムーア圏の一般的な性質から，さまざまなことがわかる．まず，PQt から Rel への忘却関手が存在する．その左随伴として，Rel から PQt への自由生成関手も存在する．忘却関手は，Rel 内の極限を PQt 上に創出する．たとえば，$(\wp(A), \odot, U)$ と $(\wp(A'), \odot', U')$ がべき集合クオンテールならば，直和集合 $A + A'$ を用いた $\wp(A + A')$ 上のべき集合クオンテールが自然に構成できる．

9　まとめ

べき集合クオンテール，$(-)^*$- 代数を対象とした，圏 PQt と圏 $(-)^*$-Alg を定義し，その間の関手を定義した．さらに定義した関手が同型関手であることを証明した．また，$(-)^*$-Alg がアイレンベルグムーア圏であることも示した．今回の研究によって，二項関係とべき集合クオンテールの関係性が少し明らかになったため，この成果を手がかりにして，埋め込みの理由を明らかにしていくことが今後の課題である．

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP22K11913 の助成を受けたものです．

参 考 文 献

[1] 古澤 仁, 高井 利憲: クリーニ代数入門, コンピュータソフトウェア, Vol.23, No.3(2006), pp.14-34.

[2] Nishizawa, K. and Furusawa, H.: Relational Representation Theorem for Powerset Quantales, Relational and Algebraic Methods in Computer Science 13th International Conference, RAMiCS 2012, Cambridge, UK, September 17-20, 2012. Proceedings, Lecture Notes in Computer Science, 7560, 207 – 218, Springer, 2012.

[3] 安田 康史, 西澤 弘毅, 古澤 仁: 前順序とべき集合クオンテールの間の関係性について, 日本ソフトウェア科学会第 37 回大会 講演論文集,2020.

[4] Mac Lane, S. Categories for the working Mathematician, Springer:Berlin, Heidelberg, New York, 2nd ed.1998. (三好 博之, 高木 理 訳,: 圏論の基礎, シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社,2005.)