

# 名目書き換えにおける強可換性を用いた合流性証明\*

菊池 健太郎

本稿では、名目書き換え (nominal rewriting) に関する基本事項と強可換性を用いた合流性の証明手法について説明する。名目書き換えは、Gabbay-Pitts による名目技法に基づいて変数束縛を扱えるように第一階項書き換えを拡張した体系であり、アルファ同値性を構文の中で明示的に扱うなどの特徴を持つ。最近導入されたアトム変数を用いる書き換え規則によって定義される名目書き換えシステムは、書き換えの対象が基底名目項に制限されるものの、これまでのシステムよりも単純であり、理解が比較的容易である。本稿では、それらの名目書き換えシステムにおける基本的な性質および合流性が成立するための条件について議論する。

## 1 はじめに

名目書き換え (nominal rewriting) [4] は、Gabbay-Pitts による名目技法 [5][10] に基づいて変数束縛を扱えるように第一階項書き換えを拡張した体系である。名目書き換えでは、束縛される可能性のある変数はアトムとよばれ、アトムに関するアルファ同値性が構文の中で明示的に扱われるという特徴を持つ。

名目書き換えにおける合流性の成立条件については、[2][4][7][11][12] で議論されてきている。本稿では、最近 [8] で導入されたアトム変数を用いる書き換え規則によって定義される名目書き換えシステムを取り扱う。著者らは、この体系における直交システムの合流性を [6] で示しているが、本稿では、強可換性を用いた合流性の証明手法について説明する。

## 2 名目書き換え

本節では、名目書き換えの基本事項を説明する。ここで扱うのは、元々の名目書き換え [4] ではなく、最

近 [8] で導入されたアトム変数を持つ体系の部分体系である。この体系では、書き換え対象と書き換え規則で異なる言語を用いる。書き換え対象は変数を含まない基底名目項であり、書き換え規則は変数を含む項 (項式とよぶ) から構成される。

### 2.1 準備

議論の対象を定めるために、関数記号の集合  $\Sigma$  を考える。関数記号は  $f, g$  等で表される。また、変数の可算無限集合  $\mathcal{X}$ 、アトムの可算無限集合  $\mathcal{A}$ 、アトム変数の可算無限集合  $\mathcal{X}_A$  を用意する。変数は  $X, Y, Z$  等で、アトムは  $a, b, c$  等で、アトム変数は  $A, B, C$  等で表す。  $\Sigma, \mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{X}_A$  は互いに共通の要素を持たないものとする。また、  $\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{X}_A$  の要素を表すメタ変数 ( $X, Y, a, b, A, B$  等) として異なる記号を用いたときは、異なる要素を表すものとする。

2 項関係  $\bowtie$  の反射閉包は  $\bowtie^=$  で、反射推移閉包は  $\bowtie^*$  で表す。  $\bowtie$  が  $\rightarrow$  を用いて書かれるとき、その逆  $\bowtie^{-1}$  は  $\leftarrow$  を用いて書かれる。

### 2.2 基底名目項

基底名目項の集合  $NL_a$  は、文法

$$t \in NL_a ::= a \mid [a]t \mid f t \mid \langle t_1, \dots, t_n \rangle$$

\* Proving confluence by strong commutation in nominal rewriting. — This is an unrefereed paper. Copyrights belong to the Author.

Kentaro Kikuchi, 東北大学電気通信研究所, Research Institute of Electrical Communication, Tohoku University.

で生成される。以下では、基底名目項を単に項という。  
 $::=$  の右側の項はそれぞれ、アトム、抽象、関数適用、  
 タプルとよばれる。関数適用は抽象よりも結合が強い  
 ものとする。  $f \langle \rangle$  を単に  $f$  と略し、定数とよぶ。抽  
 象  $[a]t$  は、  $t$  の中で  $a$  が束縛されることを意図して  
 いる。項  $t$  に現れる自由アトムの集合  $FA(t)$  は、以下で  
 定義される。  $FA(a) = \{a\}$ ;  $FA([a]t) = FA(t) \setminus \{a\}$ ;  
 $FA(f t) = FA(t)$ ;  $FA(\langle t_1, \dots, t_n \rangle) = \bigcup_i FA(t_i)$ .

例 1. ラムダ計算の項を表現するために、関数  
 記号の集合として  $\Sigma_\lambda = \{\text{lam}, \text{app}\}$  を考える。項  
 $\text{app}(\text{lam}([a]\text{lam}([b]\text{app}(b, a))), b)$  は、通常の記法での  
 ラムダ項  $(\lambda a. \lambda b. ba)b$  を表す。この項  $t$  に対して、  
 $FA(t) = \{b\}$  となる。 □

2つのアトム  $a$  と  $b$  を交換する操作を互換といい、  
 $(a b)$  で表す。置換  $\pi$  は、定義域  $\text{dom}(\pi) = \{a \in \mathcal{A} \mid \pi(a) \neq a\}$  が有限集合となるような  $\mathcal{A}$  上の全  
 単射である。置換は、互換の有限列によって表すこ  
 とができる。その場合、列の右から順に互換をアト  
 ムに適用するものとする。例えば、置換  $(b c)(a b)$   
 に対して、 $((b c)(a b))(a) = c$ ,  $((b c)(a b))(b) = a$ ,  
 $((b c)(a b))(c) = b$  となる。アトムに対する関数  
 である置換は、以下の定義により項に対する操作  
 へ拡張される。  $\pi \cdot a = \pi(a)$ ;  $\pi \cdot ([a]t) = [\pi \cdot a](\pi \cdot t)$ ;  
 $\pi \cdot (f t) = f \pi \cdot t$ ;  $\pi \cdot \langle t_1, \dots, t_n \rangle = \langle \pi \cdot t_1, \dots, \pi \cdot t_n \rangle$ .

例 2. 例 1 の項  $t$  に対して、  $(a b) \cdot t =$   
 $\text{app}(\text{lam}([b]\text{lam}([a]\text{app}(a, b))), a)$  となる。 □

項の位置は正整数の有限列で表される。空列を  $\varepsilon$   
 で表す。項  $t$  の位置集合  $\text{Pos}(t)$  は、以下のように定  
 義される。  $\text{Pos}(a) = \{\varepsilon\}$ ;  $\text{Pos}([a]t) = \text{Pos}(f t) =$   
 $\{1p \mid p \in \text{Pos}(t)\} \cup \{\varepsilon\}$ ;  $\text{Pos}(\langle t_1, \dots, t_n \rangle) = \bigcup_i \{ip \mid$   
 $p \in \text{Pos}(t_i)\} \cup \{\varepsilon\}$ . 位置  $p \in \text{Pos}(t)$  の部分項は、  $t|_p$   
 で表される。

文脈は特別な定数  $\square$  を含む項である。文脈  $C$  の位  
 置  $p_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) に現れる  $\square$  を項  $t_i$  でそれぞれ  
 置き換えて得られる項を  $C[t_1, \dots, t_n]_{p_1, \dots, p_n}$  あるいは  
 単に  $C[t_1, \dots, t_n]$  で表す。

アトム  $a$  と項  $t$  の組  $a\#t$  を非出現制約とよぶ。関  
 係  $\vdash_{NL_a} a\#t$  を、図 1 の推論規則により帰納的に定  
 義する。この関係は  $a \notin FA(t)$  と同値である。

$NL_a$  上の関係  $\vdash_{NL_a} t \approx_\alpha s$  を、図 2 の推論規則に

$$\frac{}{\vdash_{NL_a} a\#b} \quad \frac{\vdash_{NL_a} a\#t}{\vdash_{NL_a} a\#f t}$$

$$\frac{\vdash_{NL_a} a\#t_1 \quad \dots \quad \vdash_{NL_a} a\#t_n}{\vdash_{NL_a} a\#\langle t_1, \dots, t_n \rangle}$$

$$\frac{}{\vdash_{NL_a} a\#[a]t} \quad \frac{\vdash_{NL_a} a\#t}{\vdash_{NL_a} a\#[b]t}$$

図 1  $NL_a$  上の非出現制約の定義

$$\frac{}{\vdash_{NL_a} a \approx_\alpha a} \quad \frac{\vdash_{NL_a} t \approx_\alpha s}{\vdash_{NL_a} f t \approx_\alpha f s}$$

$$\frac{\vdash_{NL_a} t_1 \approx_\alpha s_1 \quad \dots \quad \vdash_{NL_a} t_n \approx_\alpha s_n}{\vdash_{NL_a} \langle t_1, \dots, t_n \rangle \approx_\alpha \langle s_1, \dots, s_n \rangle}$$

$$\frac{\vdash_{NL_a} t \approx_\alpha s}{\vdash_{NL_a} [a]t \approx_\alpha [a]s} \quad \frac{\vdash_{NL_a} (a b) \cdot t \approx_\alpha s \quad \vdash_{NL_a} b\#t}{\vdash_{NL_a} [a]t \approx_\alpha [b]s}$$

図 2  $NL_a$  上のアルファ同値性の定義

より帰納的に定義する。この関係は合同関係であり  
 [4]、通常の意味でのアルファ同値性 (束縛アトムの名  
 前換えにより到達できる関係) と一致する [5]。

非出現制約、アルファ同値性、置換に関して、以下  
 の性質が成り立つ [4] [13]。

命題 3.

1.  $\vdash_{NL_a} a\#t$  であるとき、かつそのときに限り  
 $\vdash_{NL_a} \pi \cdot a\#\pi \cdot t$ .
2.  $\vdash_{NL_a} t \approx_\alpha s$  であるとき、かつそのときに限り  
 $\vdash_{NL_a} \pi \cdot t \approx_\alpha \pi \cdot s$ .
3.  $\vdash_{NL_a} a\#t$  かつ  $\vdash_{NL_a} t \approx_\alpha s$  ならば  $\vdash_{NL_a} a\#s$ .

### 2.3 名目項式

名目項式の集合  $NL_{AX}$  は、文法

$$e \in NL_{AX} ::= A \mid X \mid [A]e \mid f e \mid \langle e_1, \dots, e_n \rangle$$

で生成される。以下では、名目項式を単に項式とい  
 う。項式  $e$  に現れる変数の集合を  $\text{Var}_X(e)$ 、アトム変  
 数の集合を  $\text{Var}_{X_A}(e)$ 、それらの和を  $\text{Var}_{X, X_A}(e)$  で表  
 す。項式  $e$  が線形であるとは、各変数  $X \in \text{Var}_X(e)$   
 が  $e$  に一度だけ現れることとする。

項式  $e$  の位置集合  $\text{Pos}(e)$  は、  $\text{Pos}(A) = \text{Pos}(X) =$

	$\vdash$	$\text{sub}\langle[A]\text{app}\langle X, Y \rangle, Z \rangle$	$\rightarrow$	$\text{app}\langle \text{sub}\langle[A]X, Z \rangle, \text{sub}\langle[A]Y, Z \rangle \rangle$	$(\text{sub}_{\text{app}})$
	$\vdash$	$\text{sub}\langle[A]A, X \rangle$	$\rightarrow$	$X$	$(\text{sub}_{\text{var}})$
$A\#B$	$\vdash$	$\text{sub}\langle[A]B, X \rangle$	$\rightarrow$	$B$	$(\text{sub}_{\text{var}\epsilon})$
$A\#B, B\#Y$	$\vdash$	$\text{sub}\langle[A]\text{lam}\langle[B]X \rangle, Y \rangle$	$\rightarrow$	$\text{lam}\langle[B]\text{sub}\langle[A]X, Y \rangle \rangle$	$(\text{sub}_{\text{lam}})$

図3  $NRS_{AX} \mathcal{R}_{\text{sub}}$

	$\vdash$	$(XY)\langle A := Z \rangle$	$\rightarrow$	$(X\langle A := Z \rangle)(Y\langle A := Z \rangle)$	$(\text{sub}_{\text{app}})$
	$\vdash$	$A\langle A := X \rangle$	$\rightarrow$	$X$	$(\text{sub}_{\text{var}})$
$A\#B$	$\vdash$	$B\langle A := X \rangle$	$\rightarrow$	$B$	$(\text{sub}_{\text{var}\epsilon})$
$A\#B, B\#Y$	$\vdash$	$(\lambda B.X)\langle A := Y \rangle$	$\rightarrow$	$\lambda B.(X\langle A := Y \rangle)$	$(\text{sub}_{\text{lam}})$

図4  $NRS_{AX} \mathcal{R}_{\text{sub}}$  (通常の記法)

$\{\epsilon\}$ である他は、項の場合と同様に定義される。位置  $p \in \text{Pos}(e)$  の部分項式は  $e|_p$  で表される。位置  $p \in \text{Pos}(e)$  が変数位置であるとは、 $e|_p$  が変数であるときをいい、そうでない場合は、非変数位置であるという。

代入  $\sigma$  は、変数に項を、アトム変数にアトムを割り当てる写像で、定義域  $\text{dom}(\sigma)$  が有限集合となるものである。項式  $e$  と代入  $\sigma$  に対して  $\text{Var}_{X, X_A}(e) \subseteq \text{dom}(\sigma)$  となるとき、 $e$  に  $\sigma$  を適用して得られる項を  $e\sigma$  で表し、 $e$  の基底具体化という。このとき、自由アトムの捕獲を考慮することなく、 $e$  に現れる変数  $X$  を項  $\sigma(X)$  で、アトム変数  $A$  をアトム  $\sigma(A)$  でそれぞれ置き換えることに注意する。

アトム変数  $A$  と項式  $e$  の組  $A\#e$  を非出現制約式とよび、非出現制約式の有限集合を非出現文脈とよぶ。

## 2.4 名目書き換えシステム

次に、名目書き換え規則と名目書き換えシステムを定義する。

**定義 4.** 名目書き換え規則とは、非出現文脈  $\nabla$  と項式  $l, r$  の3組で、以下の条件を満たすものことである。

1.  $\text{Var}_{X, X_A}(\nabla) \cup \text{Var}_{X, X_A}(r) \subseteq \text{Var}_{X, X_A}(l)$ .
2.  $l$  は変数またはアトム変数でない。

以下では、名目書き換え規則を  $\nabla \vdash l \rightarrow r$  で表す。また、名目書き換え規則のことを単に書き換え規則という。書き換え規則  $\nabla \vdash l \rightarrow r$  が左線形であるとは、 $l$

が線形であるときをいう。

**定義 5.** 名目書き換えシステムとは、書き換え規則の有限集合である。以下では、名目書き換えシステムを略して  $NRS_{AX}$  で表す。 $NRS_{AX} \mathcal{R}$  が左線形であるとは、すべての書き換え規則  $R \in \mathcal{R}$  が左線形であるときをいう。

**例 6.** 例1の集合  $\Sigma_\lambda$  を関数記号  $\text{sub}$  によって拡張する。項  $\text{sub}\langle[a]t, s \rangle$  は明示的代入  $t\langle a := s \rangle$  を表す。このとき、ベータ簡約を実現する  $NRS_{AX}$  は以下の書き換え規則 (Beta)

$$\vdash \text{app}\langle \text{lam}\langle[A]X \rangle, Y \rangle \rightarrow \text{sub}\langle[A]X, Y \rangle$$

と、代入を実行する  $NRS_{AX} \mathcal{R}_{\text{sub}}$  (図3) によって定義される。 $\mathcal{R}_{\text{sub}}$  は、通常の記法で表すと図4のようになる。□

次に、 $NRS_{AX}$  による書き換えを定義する。

**定義 7.**  $R = \nabla \vdash l \rightarrow r$  を書き換え規則とする。項  $s$  から項  $t$  への書き換えを表す関係  $s \rightarrow_{\langle R, p, \sigma \rangle} t$  が成立するのは、以下の条件を満たすときとする。

1. すべての非出現制約式  $A\#e \in \nabla$  に対して、 $\vdash_{NL_A} A\sigma\#e\sigma$ .
2.  $\vdash_{NL_A} s|_p \approx_\alpha l\sigma$ .
3.  $t|_p = r\sigma$ .

$s \rightarrow_{\langle R, p, \sigma \rangle} t$  となる  $\sigma$  が存在するとき、 $s \xrightarrow{R} t$  と書く。また、 $s \rightarrow_{\langle R, p, \sigma \rangle} t$  となる  $p$  と  $\sigma$  が存在するとき、 $s \rightarrow_R t$  と書く。 $NRS_{AX} \mathcal{R}$  に対し、 $s \rightarrow_R t$  となる  $R \in \mathcal{R}$  が存在するとき、 $s \rightarrow_{\mathcal{R}} t$  と書く。

**例 8.** 例6の書き換え規則 (Beta) を用いることで、

以下のように  $(\lambda a. \lambda b. ba)b$  を表す項は  $(\lambda b. ba)(a := b)$  を表す項に書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \text{app}\langle \text{lam}\langle [a]\text{lam}\langle [b]\text{app}\langle b, a \rangle \rangle \rangle, b \rangle \\ & \xrightarrow{(\text{Beta}, \varepsilon, \sigma)} \text{sub}\langle [a]\text{lam}\langle [b]\text{app}\langle b, a \rangle \rangle, b \rangle \end{aligned}$$

ここで、 $\sigma$  は代入  $[A := a, X := \text{lam}\langle [b]\text{app}\langle b, a \rangle \rangle, Y := b]$  である。さらに  $\mathcal{R}_{\text{sub}}$  の規則を用いて書き換えを進めることにより、正規形  $\text{lam}\langle [c]\text{app}\langle c, b \rangle \rangle$  に至る。ここでは、自由アトム<sup>1</sup>の捕獲がどのように回避されるかを見るために、規則  $(\text{sub}_{\text{lam}})$  による最初の書き換えについて詳しく説明する。

$s = \text{sub}\langle [a]\text{lam}\langle [b]\text{app}\langle b, a \rangle \rangle, b \rangle$  とおく。  $(\text{sub}_{\text{lam}})$  は非出現文脈  $\nabla = \{A \# B, B \# Y\}$  を持つので、位置  $p = \varepsilon$  で  $s$  に  $(\text{sub}_{\text{lam}})$  を適用するためには、

- (a)  $\vdash_{NL_a} A \sigma \# B \sigma$
- (b)  $\vdash_{NL_a} B \sigma \# Y \sigma$
- (c)  $\vdash_{NL_a} s \approx_{\alpha} (\text{sub}\langle [A]\text{lam}\langle [B]X \rangle, Y \rangle) \sigma$

を満たす代入  $\sigma$  を見つける必要がある。ここで、 $\sigma(B) = b$  となる  $\sigma$  をとることはできない。なぜなら、(c) とアルファ同値性の定義 (図 2) により  $Y \sigma = b$  でなければならず、(b) と矛盾するからである。したがって、例えば、 $\sigma = [A := a, B := c, X := \text{app}\langle c, a \rangle, Y := b]$  をとり、書き換えの結果として  $(\text{lam}\langle [B]\text{sub}\langle [A]X, Y \rangle \rangle) \sigma = \text{lam}\langle [c]\text{sub}\langle [a]\text{app}\langle c, a \rangle, b \rangle \rangle$  を得る。  $\square$

[8] で指摘されているように、書き換えについて以下の性質が成り立つ。

**補題 9.**  $R$  を書き換え規則とする。項  $s, t$  に対して  $s \rightarrow_R t$  が成り立つならば、任意の置換  $\pi$  に対して  $\pi \cdot s \rightarrow_R \pi \cdot t$  が成り立つ。

## 2.5 並列簡約

次節で左線形  $NRS_{AX}$  の合流性について議論するが、そこで重要となる (分離) 並列簡約の概念を定義する。

**定義 10.** 文法的文脈は、以下の文法で定義される文脈である。

$$G ::= a \mid [a] \square \mid f \square \mid \langle \square_1, \dots, \square_n \rangle$$

書き換え規則  $R$  に対し、並列簡約  $\dashv\vdash_R$  を以下の推論規則によって帰納的に定義する。

$$\frac{s \xrightarrow{\varepsilon} t}{s \dashv\vdash_R t} \quad (\text{B})$$

$$\frac{s_1 \dashv\vdash_R t_1 \quad \dots \quad s_n \dashv\vdash_R t_n}{G[s_1, \dots, s_n] \dashv\vdash_R G[t_1, \dots, t_n]} \quad (\text{C})$$

ここで、 $n (\geq 0)$  は文法的文脈  $G$  の形に依存する自然数である。

並列簡約に関して、以下の性質が成り立つ。

**補題 11.** 1.  $s \dashv\vdash_R s$ .

2.  $s \dashv\vdash_R t$  ならば  $C[s] \dashv\vdash_R C[t]$ .

3.  $s \rightarrow_R t$  ならば  $s \dashv\vdash_R t$ .

4.  $s \dashv\vdash_R t$  ならば  $s \rightarrow_R^* t$ .

**証明.** 1.  $s$  の構造に関する帰納法による。

2. 文脈  $C$  に関する帰納法による。

3. 2 と推論規則 (B) による。

4.  $s \dashv\vdash_R t$  の導出に関する帰納法による。  $\square$

## 3 強可換性を用いた合流性証明

本節では、左線形な  $NRS_{AX}$  に対する強可換性を用いた合流性証明法を説明する。名目書き換えにおいて合流性を議論するためには、いくつかの定義と  $NRS_{AX}$  に関する条件が必要になる。

### 3.1 強可換性による合流性証明法

本小節では、強可換性による合流性証明法を概観するため、第一階項 (抽象を含まない項) に対する書き換えシステム ( $TRS_{AX}$  で表す) を考える。この手法の基本的な戦略は、 $TRS_{AX}$  のどの 2 つの規則による書き換えも可換になることを示すことである。まず、可換性に関する定義と補題を述べる ([3] の pp. 31–33 を参照)。

**定義 12.**  $R_1, R_2$  を書き換え規則とする。

1.  $\rightarrow_{R_1}$  と  $\rightarrow_{R_2}$  が可換であるとは、 $s \rightarrow_{R_1}^* s_1$  かつ  $s \rightarrow_{R_2}^* s_2$  ならば、ある  $t$  が存在して  $s_1 \rightarrow_{R_2}^* t$  かつ  $s_2 \rightarrow_{R_1}^* t$  が成り立つことをいう。

2.  $\rightarrow_{R_1}$  が  $\dashv\vdash_{R_2}$  と強可換であるとは、 $s \rightarrow_{R_1} s_1$  かつ  $s \dashv\vdash_{R_2} s_2$  ならば、ある  $t$  が存在して  $s_1 \dashv\vdash_{R_2} t$  かつ  $s_2 \rightarrow_{R_1}^* t$  が成り立つことをいう。

$$\begin{array}{ccc} s & \dashv\vdash_{R_2} & s_2 \\ & \downarrow R_1 & * \downarrow R_1 \\ s_1 & \dashv\vdash_{R_2} & t \end{array}$$

**補題 13.**  $\rightarrow_{R_1}$  が  $\mapsto_{R_2}$  と強可換であるならば,  $\rightarrow_{R_1}$  と  $\rightarrow_{R_2}$  は可換である.

**定義 14.**  $TRS_{AX}$   $\mathcal{R}$  が合流性を持つとは,  $s \rightarrow_{\mathcal{R}}^* s_1$  かつ  $s \rightarrow_{\mathcal{R}}^* s_2$  ならば, ある  $t$  が存在して  $s_1 \rightarrow_{\mathcal{R}}^* t$  かつ  $s_2 \rightarrow_{\mathcal{R}}^* t$  が成り立つことをいう.

**補題 15.**  $\mathcal{R}$  を  $TRS_{AX}$  とする. すべての  $R_i, R_j \in \mathcal{R}$  に対して  $\rightarrow_{R_i}$  と  $\rightarrow_{R_j}$  が可換であるならば,  $\mathcal{R}$  は合流性を持つ.

補題 13 と補題 15 より,  $TRS_{AX}$   $\mathcal{R}$  が合流性を持つことを示すためには,  $\mathcal{R}$  の書き換え規則の任意の組み合わせ  $R_i, R_j \in \mathcal{R}$  ( $R_i = R_j$  の場合を含む) について,  $\rightarrow_{R_i}$  が  $\mapsto_{R_j}$  と強可換である, あるいは,  $\rightarrow_{R_j}$  が  $\mapsto_{R_i}$  と強可換であることを示せばよい.

以下では,  $\rightarrow_{R_1}$  が  $\mapsto_{R_2}$  と強可換になるための十分条件を与える.

**定義 16.**  $R_1$  と  $R_2 (= \nabla_2 \vdash l_2 \rightarrow r_2)$  を左線形な書き換え規則とする. このとき, 条件  $sc_1(R_1, R_2)$ ,  $sc_2(R_1, R_2)$  を以下のように定義する.

- $sc_1(R_1, R_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} s \xrightarrow{\varepsilon}_{R_1} s'$  かつ  $s \mapsto_{R_2} t$  が規則 (C) を最後に適用して導かれるならば, ある  $t'$  が存在して  $s' \mapsto_{R_2} t'$  かつ  $t \rightarrow_{R_1}^* t'$ .
- $sc_2(R_1, R_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} s \xrightarrow{p}_{R_1} s'$  かつ  $s \xrightarrow{\varepsilon}_{R_2} t$ , ここで  $p$  が  $l_2$  の非変数位置であるならば, ある  $t'$  が存在して  $s' \mapsto_{R_2} t'$  かつ  $t \rightarrow_{R_1}^* t'$ .

**補題 17.**  $R_1$  と  $R_2$  を左線形な書き換え規則とする. このとき, 条件  $sc_1(R_1, R_2)$  と  $sc_2(R_1, R_2)$  が成立するならば,  $\rightarrow_{R_1}$  は  $\mapsto_{R_2}$  と強可換である.

**証明.**  $s \mapsto_{R_2} t$  の導出に関する帰納法により,  $s \rightarrow_{R_1} s'$  かつ  $s \mapsto_{R_2} t$  ならば, ある  $t'$  が存在して  $s' \mapsto_{R_2} t'$  かつ  $t \rightarrow_{R_1}^* t'$  が成り立つことを示せばよい.  $\square$

補題 13, 15, 17 より, 以下の定理が導かれる.

**定理 18.**  $\mathcal{R}$  を左線形な  $TRS_{AX}$  とする. すべての  $R_i, R_j \in \mathcal{R}$  に対して,  $sc_1(R_i, R_j)$  かつ  $sc_2(R_i, R_j)$ , あるいは,  $sc_1(R_j, R_i)$  かつ  $sc_2(R_j, R_i)$  が成立するならば,  $\mathcal{R}$  は合流性を持つ.

### 3.2 名目書き換えにおける合流性

名目書き換えにおいて合流性を議論する際には, 書き換えによって分岐した 2 つの項がアルファ同値な項

に書き換えられるかが問題となる. そこで, 抽象書き換えで用いられる [9] ような, 同値関係  $\approx_\alpha$  を法とした性質について議論を行う.

以下では,  $\vdash_{NL_\alpha} t \approx_\alpha s$  を単に  $t \approx_\alpha s$  と書く. また,  $\circ$  は 2 項関係の合成を表す.

**定義 19.**  $\mathcal{R}$  を  $NRS_{AX}$  とする.

1. 項  $s$  と  $t$  が  $\approx_\alpha$  を法として交差する ( $s \downarrow_{\approx_\alpha} t$  と記す) とは,  $s (\rightarrow_{\mathcal{R}}^* \circ \approx_\alpha \circ \leftarrow_{\mathcal{R}}^*) t$  が成り立つことをいう.
2.  $\mathcal{R}$  が  $\approx_\alpha$  を法とした合流性を持つとは, 任意の項  $s, t$  に対して,  $s (\leftarrow_{\mathcal{R}}^* \circ \rightarrow_{\mathcal{R}}^*) t$  ならば  $s \downarrow_{\approx_\alpha} t$  が成り立つことをいう.
3.  $\mathcal{R}$  が  $\approx_\alpha$  を法としたチャーチ・ロッサー性 ( $CR_{\approx_\alpha}$  性と記す) を持つとは, 任意の項  $s, t$  に対して,  $s (\leftarrow_{\mathcal{R}} \cup \rightarrow_{\mathcal{R}} \cup \approx_\alpha)^* t$  ならば  $s \downarrow_{\approx_\alpha} t$  が成り立つことをいう.
4.  $\mathcal{R}'$  を  $NRS_{AX}$  とする.  $\rightarrow_{\mathcal{R}}$  と  $\rightarrow_{\mathcal{R}'}$  が  $\approx_\alpha$  を法として可換であるとは, 任意の項  $s, t$  に対して,  $s (\leftarrow_{\mathcal{R}}^* \circ \rightarrow_{\mathcal{R}'}^*) t$  ならば  $s (\rightarrow_{\mathcal{R}'}^* \circ \approx_\alpha \circ \leftarrow_{\mathcal{R}}^*) t$  が成り立つことをいう.

一般に, 同値関係  $\sim$  を法としたチャーチ・ロッサー性は,  $\sim$  を法とした合流性よりも強い性質であることが知られている [9]. したがって, 本稿では,  $NRS_{AX}$   $\mathcal{R}$  が  $CR_{\approx_\alpha}$  性を持つための条件を考える. そのために,  $NRS_{AX}$  が左線形であることに加え, 書き換え規則についても制約を与える. 以下の一様性 [4] という性質は, 直観的には, 書き換えによって新たな自由アトムが現れないことを意味する.

**定義 20.** 書き換え規則  $\nabla \vdash l \rightarrow r$  が一様であるとは, 以下の条件を満たすときをいう.  $Var_{\lambda, \lambda_A}(l) \subseteq dom(\sigma)$  かつ, すべての非出現制約式  $A \# e \in \nabla$  に対して  $\vdash_{NL_\alpha} A\sigma \# e\sigma$  であるとき,  $\vdash_{NL_\alpha} a \# l\sigma$  ならば  $\vdash_{NL_\alpha} a \# r\sigma$  が成り立つ.  $NRS_{AX}$   $\mathcal{R}$  が一様であるとは, すべての書き換え規則  $R \in \mathcal{R}$  が一様であるときをいう.

一様な書き換え規則に対しては, 以下の性質が成り立つ.

**補題 21.**  $R$  を一様な書き換え規則とし,  $s \rightarrow_R t$  とする. このとき, 任意のアトム  $a$  に対し,  $\vdash_{NL_\alpha} a \# s$  ならば  $\vdash_{NL_\alpha} a \# t$  が成り立つ.

**定義 22.**  $R$  を書き換え規則とする。  $\rightarrow_R$  が  $\approx_\alpha$  と強両立であるとは、任意の項  $s, t$  に対して、  $s (\approx_\alpha \circ \rightarrow_R) t$  ならば  $s (\rightarrow_{\bar{R}} \circ \approx_\alpha) t$  が成り立つことをいう。

**補題 23.**  $R$  が一様な書き換え規則ならば、  $\rightarrow_R$  は  $\approx_\alpha$  と強両立である。

### 3.3 名目書き換えにおける $CR_{\approx_\alpha}$ 性の十分条件

本小節では、3.1 節で述べた  $TRS_{AX}$  が合流性を持つための十分条件を拡張して、  $NRS_{AX}$  が  $CR_{\approx_\alpha}$  性を持つための十分条件を提案する。

まず、[9] では扱われていない  $\approx_\alpha$  を法とした強可換性の概念を定義する。

**定義 24.**  $R_1, R_2$  を書き換え規則とする。  $\rightarrow_{R_1}$  が  $\approx_\alpha$  を法として  $\dashv\vdash_{R_2}$  と強可換であるとは、  $s \rightarrow_{R_1} s'$  かつ  $s \dashv\vdash_{R_2} t$  ならば、ある  $t'_1, t'_2$  が存在して  $s' \dashv\vdash_{R_2} t'_2$  かつ  $t \rightarrow_{R_1}^* t'_1$  かつ  $t'_1 \approx_\alpha t'_2$  が成り立つことをいう。

$$\begin{array}{ccc} s & \dashv\vdash_{R_2} & t \\ \downarrow R_1 & & * \downarrow R_1 \\ s' & \dashv\vdash_{R_2} & t'_2 \approx_\alpha t'_1 \end{array}$$

**補題 25.**  $\rightarrow_{R_1}$  が  $\approx_\alpha$  を法として  $\dashv\vdash_{R_2}$  と強可換であり、  $\rightarrow_{R_1}$  と  $\rightarrow_{R_2}$  がともに  $\approx_\alpha$  と強両立であるならば、  $\rightarrow_{R_1}$  と  $\rightarrow_{R_2}$  は  $\approx_\alpha$  を法として可換である。

**補題 26.**  $\mathcal{R}$  を  $NRS_{AX}$  とする。すべての  $R_i, R_j \in \mathcal{R}$  に対して  $\rightarrow_{R_i}$  と  $\rightarrow_{R_j}$  が  $\approx_\alpha$  を法として可換であるならば、  $\mathcal{R}$  は  $CR_{\approx_\alpha}$  性を持つ。

次に、  $\rightarrow_{R_1}$  が  $\approx_\alpha$  を法として  $\dashv\vdash_{R_2}$  と強可換になるための十分条件を与える。

**定義 27.**  $R_1$  と  $R_2 (= \nabla_2 \vdash l_2 \rightarrow r_2)$  を左線形な書き換え規則とする。このとき、条件  $sc_1(R_1, R_2, \approx_\alpha)$ 、  $sc_2(R_1, R_2, \approx_\alpha)$  を以下のように定義する。

- $sc_1(R_1, R_2, \approx_\alpha) \stackrel{\text{def}}{\iff} s \xrightarrow{\varepsilon}_{R_1} s'$  かつ  $s \dashv\vdash_{R_2} t$  が規則 (C) を最後に適用して導かれるならば、ある  $t'_1, t'_2$  が存在して  $s' \dashv\vdash_{R_2} t'_2$  かつ  $t \rightarrow_{R_1}^* t'_1$  かつ  $t'_1 \approx_\alpha t'_2$ 。
- $sc_2(R_1, R_2, \approx_\alpha) \stackrel{\text{def}}{\iff} s \xrightarrow{p}_{R_1} s'$  かつ  $s \xrightarrow{\varepsilon}_{R_2} t$ 、ここで  $p$  が  $l_2$  の非変数位置であるならば、ある  $t'_1, t'_2$  が存在して  $s' \dashv\vdash_{R_2} t'_2$  かつ  $t \rightarrow_{R_1}^* t'_1$  かつ  $t'_1 \approx_\alpha t'_2$ 。

**補題 28.**  $R_1$  と  $R_2$  を左線形かつ一様な書き換

え規則とする。このとき、条件  $sc_1(R_1, R_2, \approx_\alpha)$  と  $sc_2(R_1, R_2, \approx_\alpha)$  が成立するならば、  $\rightarrow_{R_1}$  は  $\approx_\alpha$  を法として  $\dashv\vdash_{R_2}$  と強可換である。

補題 23, 25, 26, 28 より、以下の定理が導かれる。

**定理 29.**  $\mathcal{R}$  を左線形かつ一様な  $NRS_{AX}$  とする。すべての  $R_i, R_j \in \mathcal{R}$  に対して、  $sc_1(R_i, R_j, \approx_\alpha)$  かつ  $sc_2(R_i, R_j, \approx_\alpha)$ 、あるいは、  $sc_1(R_j, R_i, \approx_\alpha)$  かつ  $sc_2(R_j, R_i, \approx_\alpha)$  が成立するならば、  $\mathcal{R}$  は  $CR_{\approx_\alpha}$  性を持つ。

## 4 おわりに

本稿では、アトム変数を持つ名目書き換えにおいて  $CR_{\approx_\alpha}$  性が成り立つ条件について議論してきた。  $\approx_\alpha$  を法とした強可換性の概念を新たに定義し、それが成立するための十分条件を提案した。

今後の課題としては、提案した条件の判定手続きを合流性検証器 [1] に実装し、様々な例に適用することでその有効性を調査することがあげられる。

**謝辞** 本研究の一部は JSPS 科研費 JP17K00005, JP19K11891, JP20H04164 の助成を受けて行われた。

## 参考文献

- [1] Aoto, T., Kikuchi, K.: Nominal confluence tool. In: Olivetti, N., Tiwari, A. (eds.) IJCAR 2016. LNCS, vol. 9706, pp. 173–182. Springer-Verlag (2016)
- [2] Ayala-Rincón, M., Fernández, M., Gabbay, M.J., Rocha-Oliveira, A.C.: Checking overlaps of nominal rewriting rules. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 323, 39–56 (2016)
- [3] Baader, F., Nipkow, T.: *Term Rewriting and All That*. Cambridge University Press (1998)
- [4] Fernández, M., Gabbay, M.J.: Nominal rewriting. *Inform. Comput.* 205, 917–965 (2007)
- [5] Gabbay, M.J., Pitts, A.M.: A new approach to abstract syntax with variable binding. *Formal Aspects Comput.* 13, 341–363 (2002)
- [6] Kikuchi, K., Aoto, T.: Confluence and commutation for nominal rewriting systems with atom-variables. In: Pre-proceedings of the 30th LOPSTR (2020) Available at <https://nms.kcl.ac.uk/mariabel.fernandez/LOPSTR2020/>
- [7] Kikuchi, K., Aoto, T., Toyama, Y.: Parallel closure theorem for left-linear nominal rewriting systems. In: Proceedings of the 11th FroCoS. LNCS, vol. 10483, pp. 115–131. Springer-Verlag (2017)
- [8] Kutz, Y., Schmidt-Schauß, M.: Rewriting with

- generalized nominal unification. *Math. Struct. Comput. Sci.*, pp. 1–26 (2020) <https://doi.org/10.1017/S0960129520000122>
- [9] Ohlebusch, E.: Church-Rosser theorems for abstract reduction modulo an equivalence relation. In: *Proceedings of the 9th RTA. LNCS*, vol. 1379, pp. 17–31. Springer-Verlag (1998)
- [10] Pitts, A.M.: Nominal logic, a first order theory of names and binding. *Inform. Comput.* 186, 165–193 (2003)
- [11] Suzuki, T., Kikuchi, K., Aoto, T., Toyama, Y.: Confluence of orthogonal nominal rewriting systems revisited. In: *Proceedings of the 26th RTA. LIPIcs*, vol. 36, pp. 301–317 (2015)
- [12] Suzuki, T., Kikuchi, K., Aoto, T., Toyama, Y.: Critical pair analysis in nominal rewriting. In: *Proceedings of the 7th SCSS. EPiC*, vol. 39, pp. 156–168. EasyChair (2016)
- [13] Urban, C., Pitts, A.M., Gabbay, M.J.: Nominal unification. *Theoret. Comput. Sci.* 323, 473–497 (2004)