日本ソフトウェア科学会第 37 回大会 (2020 年度) 講演論文集

前順序とべき集合クオンテールの間の関係性について

安田 康史　西澤 弘毅　古澤 仁

べき集合クオンテールは，ある集合 X のべき集合，包含関係，和集合，二項演算，単位元からなる組であり，一定の条件を満たすものでできている代数構造である．さらにその X が前順序，二項演算が二項関係どうしの合成，単位元が恒等関係である例のことを関係的クオンテールと呼ぶ．既存研究で，任意のべき集合クオンテール Q から関係的クオンテールへのある埋め込みが見つかっている．このことからべき集合クオンテールとなんらかの条件下の前順序との間に相互変換があると予測される．これらを対象とする圏を考え，変換をその間の関手として定義することで関係を明らかにしていく．今回は，見つかった圏とそれらの間の一方向的な関手と，関係的クオンテールへの埋め込みとの関係性を例を用いて説明していく．

A powerset quantale is an algebraic structure consisting of the powerset of a set X, the inclusion relation, the union operator, a binary operator and its unit, which satisfies certain conditions. Furthermore, when X is a preorder, the binary operator is the composition of binary relations, and the unit is the identity relation, it is called a relational quantale. In the literature, for any powerset quantale Q, there exists an embedding of Q into some relational quantale. Therefore, we predicted that there is an interconversion between powerset quantales and preorders under some conditions. By considering categories and functors between them, we try to clearfy the relationship between them. In this article, we will explain the categories and unidirectional functors found in this study, and relationship between them and the embedding into relational quantales, by using examples.

1 はじめに

プログラム検証や最短経路問題に応用されている代数的構造としてクリーニ代数（Kleene algebra）や単位的クオンテール（unital quantale）というものがある [1]．クリー二代数にはある種の「繰り返し」を意味する演算 $*$ が入っているため，プログラムの繰り返し構造のモデル化に有効である．単位的クオンテールとは，完備上半束に，その上限演算との分配束を満たすモノイド構造が入った代数的構造のことであり，この上限とモノイド構造からクリー二代数の $*$ 演算を構成できるため, 同様の構造のモデル化に有効である．

単位的クオンテールの典型例は，ある集合上の二項関係全体を台集合とし，モノイド構造を二項関係同士の合成演算と恒等関係で与えた例である．ただし，合成演算と恒等関係について閉じるためには，台集合は二項関係全体である必要はなく，ある前順序（を直積集合の部分集合とみなしたもの）の部分集合全体を台集合としても単位的クオンテールになる．この構造を関係的クオンテール（relational quantale）と呼ぶ．

関係的クオンテールがどのような意味で単位的クオンテールの典型例と言えるかについては広く研究が行われているが，特に，どのようなクオンテールがどのような写像で関係的クオンテールに埋め込めるか，

A relationship between Preorders and Powerset Quantales.

Koji Yasuda, 神奈川大学大学院工学研究科工学専攻情報システム創成領域, Field of Information Systems Creation, Course of Engineering, Graduate School Engineering, Kanagawa University.

Koki Nishizawa, 神奈川大学工学部情報システム創成学科, Department of Information Systems Creation, Faculty of Engineering, Kanagawa University.

Hitoshi Furusawa, 鹿児島大学大学院理工学研究科理学専攻, Department of Science, Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima University.

ということを示す定理を関係的表現定理（relational representation theorem）と呼ぶ．西澤と古澤は，ある集合のべき集合で完備上半束が与えられている単位的クオンテールをべき集合クオンテール（powerset quantale）と呼び，任意のべき集合クオンテールが，ある関係的クオンテールに単射準同型で埋め込めるという関係的表現定理を示した [2]．

本研究の動機は，ブール代数の表現定理がストーン双対性 [4] に発展するのと同様に，上記の関係的表現定理は何らかの圏の間の何らかの相互変換に発展するだろうか，という疑問である．元々，任意の前順序 R からべき集合クオンテール $\wp(R)$ を構成できることがわかっているが，上記の関係的表現定理により，任意のべき集合クオンテール Q に対し，ある前順序 R_Q と，Q から $\wp(R_Q)$ への単射準同型を構成できることがわかったことになる．そこで，べき集合クオンテールを対象とする圏と前順序を対象とする圏の間に，どのような関手が存在するかを明らかにすることが目的である．

本稿および既発表論文 [3] の貢献は以下の通りである．

1. 前順序 R からべき集合クオンテール $\wp(R)$ の構成を，関手に発展させた．そのために，まず前順序集合の間の単調写像に，中間値の性質（intermediate value property）および恒等反映的（identity reflecting）という追加条件を定義した．これらの条件を満たす写像を射とし，前順序集合を対象とする圏から，べき集合クオンテールを対象とし，単位的クオンテール準同型を射とする圏への反変関手（contravariant functor）を与えた．
2. 上記 1. の圏や関手を段階的に構成するために，前順序より弱い構造として弱前順序（weak preorder）という概念を定義した．また，単位的クオンテールより弱いクオンテールという既知の構造の間に, 準同型より弱い射として緩準同型（lax homomorphism）という概念を定義した．上記 1. の関手は，これらを用いた圏の間の関手から始めて，段階的に構成した．
3. 上記 1. および 2. をさらに段階的に構成するために，弱前順序からクオンテールを構成する中間生成物として，部分的半群（partial semigroup）という概念を定義し，上記の関手を 2 つの関手に分割して，段階ごとに独立に構成した．
4. べき集合クオンテールの例を 4 種類挙げ，関係的表現定理によるそれぞれの埋め込み写像が部分的半群の間の射の像かどうかを考察した．

本稿の残りの構成は以下の通りである．2 節では，弱前順序と部分的半群および，クオンテール間の緩準同型という概念を定義し，弱前順序からクオンテールの構成を 2 つの関手の合成として与える．3 節では，クオンテールの間の射として準同型を用いた場合の圏を考え，それに伴って 2 節で与えた圏や関手を発展させる．4 節では，べき集合クオンテールと単位的クオンテール準同型を用いた場合の圏を考え，それに伴って 3 節で与えた圏や関手を発展させる．5 節では，べき集合クオンテールと関係埋め込みの例を 4 種類挙げる．6 節では，4 節の関手と 5 節の例の関係を述べる．7 節では，本研究の結果をまとめる．

2　弱前順序からクオンテールの構成

2 節では，弱前順序と部分的半群および，クオンテール間の緩準同型という概念，それら 3 つを用いる圏 **WPreOrd**，**PSG**，$\mathbf{Qt_{lax}}$ を定義し，その間の関手 **comp** と $\wp$ を与える．これ以降，射の合成を $\circ$，恒等射を id で表す．これ以降で定義される圏はいずれも，射の実体は写像であり，射の合成は写像の合成，恒等射は恒等写像で定義される．

はじめに，弱前順序と部分的半群を用いる圏とそれに伴って必要になる定義，2 つの圏の間の関手 **comp** を説明する．

定義 2.1 (二項関係)**.** 二つの集合 A_1，A_2 に対して，A_1 と A_2 との間の二項関係とは，直積集合 $A_1 \times A_2$ の部分集合 R のことをいい，$x \in A_1$,$y \in A_2$ に対して $(x, y) \in R$ のことを xRy とも表す．また二項関係 R が直積集合 $A \times A$ の部分集合であるとき，R を集合 A 上の二項関係という．

定義 2.2 (弱前順序)**.** X 上の弱前順序（*weak preorder*）とは X 上の推移的二項関係 R であり，X の任意の要素 x に対して y が存在し，$(x, y) \in R$ また

は $(y,x) \in R$ を満たしているもののこと．

定義 2.3 (弱前順序集合)**.** 弱前順序集合（*weak preordered set*）とは，集合 X と X 上の弱前順序 R の組 (X,R) のこと．

定義 2.4 (**WPreOrd**)**.** **WPreOrd** とは以下からなる圏である．

- 対象は弱前順序集合．
- (X,R) から (X',R') への射 f は単調写像．すなわち写像 $f : X \to X'$ で，$(x,y) \in R$ のとき，$(f(x),f(y)) \in R'$ となるもののこと．

定義 2.5 (部分的半群)**.** 部分的半群（*partial semigroup*）とは以下のことを満たす組 $(X,\cdot)$ のこと．

1. X は集合である．
2. $\cdot$ は X 上の部分二項演算（すなわち，$x \cdot y$ は未定義でもよい）．
3. $x \cdot y$ と $(x \cdot y) \cdot z$ が定義される $\Leftrightarrow$ $y \cdot z$ と $x \cdot (y \cdot z)$ が定義される．
4. 条件 *3* の左辺と右辺の少なくとも一方（すなわち両方）を満たす x，y，z について，$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ である．

定義 2.6 (**PSG**)**.** **PSG** とは以下からなる圏である．

- 対象は部分的半群．
- $(X,\cdot)$ から $(X',\cdot')$ への射は準同型写像，すなわち以下を満たす写像 $f : X \to X'$．
  1. $x \cdot y$ が定義されるような $x,y \in X$ に対して，$f(x) \cdot' f(y)$ が定義される．
  2. 条件 *1* を満たす x，y について，$f(x) \cdot' f(y) = f(x \cdot y)$ となる．

例 2.7. 任意の集合 A に対して，$(\Delta_A, ;)$，$(A,\cdot)$ と $f : (\Delta_A, ;) \to (A,\cdot)$ は，**PSG** の対象と射である．ただし，$\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$，$f(a,a) = a$ で，$\cdot$ は $x \cdot y = x$（$x = y$ のとき），$x \cdot y =$ 未定義（それ以外のとき）．$;$ は，もし $x = y$ ならば $(w,x) ; (y,z)$ は定義され，かつ $(w,x) ; (y,z) = (w,z)$．

例 2.8. 任意の集合 A に対して，$(R, ;)$，$(A \times A, ;)$ と $f : (R, ;) \to (A \times A, ;)$ は，**PSG** の対象と射である．ただし，$R = \{((x,y),(x,z)) \mid x,y,z \in A\}$，$f((x,y),(x,z)) = (y,z)$．

例 2.9. 任意の集合 A に対して，$(R, ;)$，$(A^*,\cdot)$ と $f : (R, ;) \to (A^*,\cdot)$ は，**PSG** の対象と射である．ただし，$R = \{(\sigma, \sigma \cdot \tau) | \sigma, \tau \in A^*\}$，$f((\sigma, \sigma \cdot \tau)) = \tau$，$A^*$ は A の元の有限列全体．

定理 2.10. 以下の対応 **comp** は **WPreOrd** から **PSG** への関手となる．

- **WPreOrd** の対象 (X,R) に対して，$\mathbf{comp}(X,R) \overset{\mathrm{def}}{=} (R, ;)$ とする．ここで，もし $x = y$ ならば $(w,x) ; (y,z)$ は定義され，かつ $(w,x) ; (y,z) = (w,z)$ とする．
- **WPreOrd** の射 $f : (X,R) \to (X',R')$ に対して，$\mathbf{comp}(f) : (R, ;) \to (R', ;)$ は (x,y) を $(f(x),f(y))$ に写すものとする．

証明. **WPreOrd** の射 $f : (X,R) \to (X',R')$ をとる．$(x,y) \in R$ をとる．f の単調性より，$\mathbf{comp}(f)(x,y) = (f(x),f(y)) \in R'$．$(w,x) ; (y,z)$ が定義されるような $(w,x),(y,z) \in R$ をとる．このとき，$x = y$，$(w,x) ; (y,z) = (w,z)$ である．$\mathbf{comp}(f)(w,x) ; \mathbf{comp}(f)(y,z) = (f(w),f(x)) ; (f(y),f(z)) = (f(w),f(z)) = \mathbf{comp}(f)(w,z)$ となる．よって，**WPreOrd** の射 f に対して，$\mathbf{comp}(f)$ は **PSG** の射になる．**WPreOrd** の射 $h : (X',R') \to (X'',R'')$ をとる．$\mathbf{comp}(h \circ f)(x,y) = ((h \circ f)(x),(h \circ f)(y)) = (h(f(x)),h(f(y))) = \mathbf{comp}(h)(f(x),f(y)) = \mathbf{comp}(h)(\mathbf{comp}(f)(x,y)) = (\mathbf{comp}(h) \circ \mathbf{comp}(f))(x,y)$ となり **comp** は合成を保つ．また，$\mathbf{comp}(\mathrm{id}_{(X,R)})(x,y) = (\mathrm{id}_{(X,R)}(x), \mathrm{id}_{(X,R)}(y)) = (x,y) = \mathrm{id}_{\mathbf{comp}(X,R)}(x,y)$ より **comp** は恒等射を保つ．したがって **comp** が **WPreOrd** から **PSG** への関手となる． □

ここまでは，弱前順序と部分的半群を用いた圏，その間の関手 **comp** を説明した．次にクオンテール間の緩準同型を用いた圏と関手 $\wp$ を説明する．

定義 2.11 (クオンテール)**.** クオンテール（*quantale*）とは以下のことを満たす組 $(Q,\leq,\vee,\odot)$ のこと．

1. $(Q,\odot)$ は半群である．
2. $(Q,\leq,\vee)$ は完備上半束である．
   - $(X,\leq)$ は半順序集合．
   - X の任意の部分集合 S に対して，$\vee S$ が S

の上限である．

3. Q の任意の部分集合 S と Q の任意の要素 q に対し，$(\vee S)\odot q = \vee\{s\odot q \mid s\in S\}$ が成り立つ．
4. Q の任意の部分集合 S と Q の任意の要素 q に対し，$q\odot(\vee S) = \vee\{q\odot s \mid s\in S\}$ が成り立つ．

定義 2.12 ($\mathbf{Qt_{lax}}$)．$\mathbf{Qt_{lax}}$ とは以下からなる圏である．

- 対象はクオンテール．
- $(Q,\leq,\vee,\odot)$ から $(Q',\leq',\vee',\odot')$ への射は緩準同型（*lax homomorphism*）．すなわち以下を満たす写像 $f:Q\to Q'$ のこと．
  1. Q の任意の部分集合 S に対し，$f(\vee S) = \vee'\{f(s)|s\in S\}$ が成り立つ．
  2. Q の任意の要素 q_1，q_2 に対し，$f(q_1)\odot' f(q_2)\leq' f(q_1\odot q_2)$ が成り立つ．

定理 2.13. 以下の対応 $\wp$ は $\mathbf{PSG}^{op}$ から $\mathbf{Qt_{lax}}$ への関手となる．

- $\mathbf{PSG}$ の対象 $(X,\cdot)$ に対して，$\wp(X,\cdot)\overset{\mathrm{def}}{=}(\wp(X),\subseteq,\cup,[\cdot])$ である．$\wp(X)$ の任意の部分集合 α に対し，$\cup\alpha$ が α の上限になる．ただし，$\cup\alpha=\{a \mid \exists X\in\alpha, \alpha\in X\}$ とする．ここで，$S_1\,[\cdot]\,S_2 \overset{\mathrm{def}}{=} \{s_1\cdot s_2 \mid s_1\in S_1, s_2\in S_2, s_1\cdot s_2$ は定義されている $\}$
- $\mathbf{PSG}$ の射 $f:(X,\cdot)\to(X',\cdot')$ に対して，$\wp(f):\wp(X',\cdot')\to\wp(X,\cdot)$ は写像 $\wp(f)(S')=\{x\in X \mid f(x)\in S'\}$．

証明．はじめに，$(\wp(X),\subseteq,\cup,[\cdot])$ が $\mathbf{Qt_{lax}}$ の対象であることを示す．

- $(\wp(X),[\cdot])$ は半群である．任意の要素 $x,y,z\in\wp(X)$ に対し，
  $a\in(x\,[\cdot]\,y)\,[\cdot]\,z$
  $\Leftrightarrow a\in\{s_1\cdot s_2 \mid s_1\in x\cdot y, s_2\in z, s_1\cdot s_2$ は定義されている $\}$
  $\Leftrightarrow a\in\{s_1\cdot s_2 \mid s_1\in\{s_1'\cdot s_2' \mid s_1'\in x, s_2'\in y, s_1'\cdot s_2'$ は定義されている $\}, s_2\in z, s_1\cdot s_2$ は定義されている $\}$
  $\Leftrightarrow a\in\{(s_1'\cdot s_2')\cdot s_2 \mid s_1'\in x, s_2'\in y, s_2\in z, s_1'\cdot s_2'$ は定義されている,$(s_1'\cdot s_2')\cdot s_2$ は定義されている $\}$
  $\Leftrightarrow a\in\{s_1'\cdot(s_2'\cdot s_2) \mid s_1'\in x, s_2'\in y, s_2\in z, s_2'\cdot s_2$ は定義されている,$s_1'\cdot(s_2'\cdot s_2)$ は定義されている $\}$
  $\Leftrightarrow a\in\{s_1'\cdot s_4 \mid s_1'\in x, s_4\in\{s_2'\cdot s_2 \mid s_2'\in y, s_2\in z, s_2'\cdot s_2$ は定義されている $\}$,$s_1'\cdot s_4$ は定義されている $\}$
  $\Leftrightarrow a\in\{s_1'\cdot s_4 \mid s_1\in x, s_4\in y[\cdot]z, s_1'\cdot s_4$ は定義されている $\}$
  $\Leftrightarrow a\in x\,[\cdot]\,(y\,[\cdot]\,z)$．
- $(\wp(X),\subseteq,\cup)$ が完備上半束であることはよく知られた事実なので証明を省略する．
- 任意の $S\subseteq\wp(X)$，$A\in\wp(X)$ に対し，$(\cup S)\,[\cdot]\,A=\cup\{R\,[\cdot]\,A \mid R\in S\}$，$A\,[\cdot]\,(\cup S)=\cup\{A\,[\cdot]\,R \mid R\in S\}$ であることを示す．$a\in(\cup S)\,[\cdot]\,A$ と仮定する．ある s_1，s_2 が存在し，$s_1\in\cup S$，$s_2\in A$，$s_1\cdot s_2$ は定義され，$a=s_1\cdot s_2$ である．$\cup$ の定義より，S のある要素 R が存在し，$s_1\in R$ のとき $a\in R\,[\cdot]\,A$ なので，$a\in\cup\{R\,[\cdot]\,A|R\in S\}$．逆に，$b\in\cup\{R\,[\cdot]\,A|R\in S\}$ と仮定する．$\cup$ の定義より，S のある要素 R が存在し，$b\in R\,[\cdot]\,A$ である．ある s_1，s_2 が存在し，$s_1\in R$，$s_2\in A$，$s_1\cdot s_2$ は定義され，$b=s_1\cdot s_2$ である．$\cup$ の定義より，$s_1\in\cup S$ である．よって，$b\in(\cup S)\,[\cdot]\,A$．
  よって，$(\wp(X),\subseteq,\cup,[\cdot])$ は $\mathbf{Qt_{lax}}$ の対象である．

次に，$\wp(f):\wp(X',\cdot')\to\wp(X,\cdot)$ が $\mathbf{Qt_{lax}}$ の射であることを示す．

- $\mathbf{PSG}$ の射 f に対して，$\wp(f)$ が緩準同型であることを示す．$\wp(X)$ の任意の部分集合 A に対して，$\wp(f)(\cup A)=\{x\in X \mid f(x)\in\cup A\}=\{x\in X \mid \exists S\in A.f(x)\in S\}=\cup\{\{x\in X \mid f(x)\in S\} \mid S\in A\}=\cup\{\wp(f)(S) \mid S\in A\}$．よって，$\wp(f)$ は $\cup$ を保つ．S_1'，S_2' を $\wp(X')$ の任意の要素とする．$x\in\wp(f)(S_1')\,[\cdot]\,\wp(f)(S_2')$ をとる．$[\cdot]$ より，$s_1\in\wp(f)(S_1')$ と $s_2\in\wp(f)(S_2')$ と $x=s_1\,[\cdot]\,s_2$ を満たす $s_1,s_2\in X$ がある．また $\wp(f)$ より，$f(s_1)\in S_1'$，$f(s_2)\in S_2'$ と $x=s_1\cdot s_2$ を満たす $s_1,s_2\in X$ がある．f は $\mathbf{PSG}$ の射なので，$f(x)=f(s_1\cdot s_2)=f(s_1)\cdot' f(s_2)\in S_1'\,[\cdot']\,S_2'$ を満たし，よって $x\in\wp(f)(S_1'\,[\cdot']\,S_2')$ である．したがって，$\wp(f)(S_1')\,[\cdot']\,\wp(f)(S_2')\subseteq\wp(f)(S_1'\,[\cdot]\,S_2')$

である．よって，$\wp(f)$ は緩準同型となる．

- $\wp$ が合成と恒等射を保つことは，$\wp(f)(S)$ が f による S の逆像であることから明らか．

したがって $\wp$ が $\mathbf{PSG}^{op}$ から $\mathbf{Qt_{lax}}$ への関手となる． □

3 クオンテール準同型に対応する条件

3 節では，2 節で定義した圏に中間値の性質を追加した圏 $\mathbf{WPreOrd_{int}}$，分割的を追加した圏 $\mathbf{PSG_{div}}$，クオンテールの間の射として準同型を用いた場合の圏 $\mathbf{Qt}$ を定義し，その間の関手 $\mathbf{comp}$ と $\wp$ を与える．

はじめに，$\mathbf{WPreOrd_{int}}$ と $\mathbf{PSG_{div}}$，その間の関手を説明する．

定義 3.1 ($\mathbf{WPreOrd_{int}}$)**.** $\mathbf{WPreOrd_{int}}$ とは以下からなる圏である．

- 対象は弱前順序集合．
- (X, R) から (X', R') への射 f は単調写像であり，中間値の性質を満たすもの．中間値の性質（*intermediate value property*）とは，すなわち $(x, y) \in R$，$(f(x), z') \in R'$，$(z', f(y)) \in R'$ となるような $x, y \in X$，$z' \in X'$ に対して，$f(z) = z'$，$(x, z) \in R$，$(z, y) \in R$ となるような $z \in X$ が存在することである．

定義 3.2 ($\mathbf{PSG_{div}}$)**.** $\mathbf{PSG_{div}}$ とは以下からなる圏である．

- 対象は部分的半群．
- $(X, \cdot)$ から $(X', \cdot')$ への射 f は準同型写像であり，分割的であるもの．分割的（*dividing*）とはすなわち，$x' \cdot' y' = f(z)$ を満たしている $x', y' \in X'$ と $z \in X$ に対して，$f(x) = x'$，$f(y) = y'$，$x \cdot y = z$ となるような $x, y \in X$ が存在することである．

例 3.3. 任意の集合 A に対して，例 2.7 の $(\Delta_A, ;)$，$(A, \cdot)$ と $f : (\Delta_A, ;) \to (A, \cdot)$ は，$\mathbf{PSG_{div}}$ の対象と射である．

例 3.4. 任意の集合 A に対して，例 2.8 の $(R, ;)$，$(A \times A, ;)$ と $f : (R, ;) \to (A \times A, ;)$ は，$\mathbf{PSG_{div}}$ の対象と射である．

例 3.5. 任意の集合 A に対して，例 2.9 の $(R, ;)$，$(A^*, \cdot)$ と $f : (R, ;) \to (A^*, \cdot)$ は，$\mathbf{PSG_{div}}$ の対象と射である．

定理 3.6. 定理 2.10 の関手 $\mathbf{comp}$ は $\mathbf{WPreOrd_{int}}$ から $\mathbf{PSG_{div}}$ への関手にもなる．

証明． $\mathbf{WPreOrd_{int}}$ の射 $f : (X, R) \to (X', R')$ をとる．$(x, y) \in R$ をとる．$(w', x') ; (y', z') = \mathbf{comp}(f)(w, z)$ を満たす $(w', x'), (y', z') \in R'$ と $(w, z) \in R$ をとる．このとき，$x' = y'$，$f(w) = w'$，$f(z) = z'$ である．f の中間値の性質より，$f(x) = x', (w, x) \in R$，$(x, z) \in R$ となる $x \in X$ が存在する．それらは，$\mathbf{comp}(f)(w, x) = (f(w), f(x)) = (w', x'), \mathbf{comp}(f)(x, z) = (f(x), f(z)) = (x', z')$，$(w, x) ; (x, z) = (w, z)$ を満たしている．よって f は分割的である．したがって $\mathbf{comp}$ が $\mathbf{WPreOrd_{int}}$ から $\mathbf{PSG_{div}}$ への関手となる． □

ここまでは，2 節の圏に追加条件を加え，弱前順序と部分的半群を用いた圏，その間の関手 $\mathbf{comp}$ を説明した．次にクオンテール間の準同型を用いた圏と関手 $\wp$ を説明する．

定義 3.7 ($\mathbf{Qt}$)**.** $\mathbf{Qt}$ とは以下からなる圏である．

- 対象はクオンテール．
- $(Q, \leq, \vee, \odot)$ から $(Q', \leq', \vee', \odot')$ への射は準同型写像のこと．すなわち以下を満たす写像 $f : Q \to Q'$ のこと．
  1. Q の任意の部分集合 S に対し，$f(\vee S) = \vee'\{f(s) | s \in S\}$ が成り立つ．
  2. Q の任意の要素 q_1，q_2 に対し，$f(q_1 \odot q_2) = f(q_1) \odot' f(q_2)$ が成り立つ．

定理 3.8. 定理 2.13 の関手 $\wp$ は $\mathbf{PSG_{div}}^{op}$ から $\mathbf{Qt}$ への関手にもなる．

証明． $\mathbf{PSG_{div}}$ の射 $f : (X, \cdot) \to (X', \cdot')$ に対して，$\wp(f)$ が準同型であることを示す．S'_1, S'_2 を $\wp(X')$ の任意の要素とする．$x \in \wp(f)(S'_1\,[\cdot']\,S'_2)$ をとる．$[\cdot]$ と $\wp(f)$ より，$f(x) = x'_1 \cdot x'_2$ を満たす $x'_1 \in S'_1$，$x'_2 \in S'_2$ が存在する．$f \in \mathbf{PSG_{div}}$ から，$f(x_1) = x'_1$，$f(x_2) = x'_2$，$x = x_1 \cdot x_2$ を満たす $x_1, x_2 \in X$ が存在する．したがって，$x = x_1 \cdot x_2 = \{x_1\}\,[\cdot]\,\{x_2\} \subseteq \wp(f)(S'_1)\,[\cdot]\,\wp(f)(S'_2)$．よって，$\wp(f)$ は準同型となる．したがって $\wp$ が $\mathbf{PSG_{div}}^{op}$ から $\mathbf{Qt}$ への関手と

なる． $\square$

4 前順序からべき集合クオンテールの構成

4 節では，3 節で定義した圏の条件に恒等反映的を追加し，対象を前順序とした圏 $\mathbf{PreOrd_{int,idref}}$，対象を単位的部分的半群とした圏 $\mathbf{UPSG_{div}}$，べき集合クオンテールを対象とし，間の射として単位的クオンテール準同型を用いた圏 $\mathbf{PowersetQt}$ を定義する．それに伴って 3 節で与えた関手 $\mathbf{comp}$ と $\wp$ を発展させたものを与える．

はじめに，圏 $\mathbf{PreOrd_{int,idref}}$ と $\mathbf{UPSG_{div}}$，それに伴って必要となる定義と，間の関手 $\mathbf{comp}$ を説明する．

定義 4.1 (前順序)**.** X 上の前順序（*preorder*）とは X 上の二項関係 $\leq$ で推移的かつ反射的であるもののこと．

定義 4.2 (前順序集合)**.** 前順序集合（*preordered set*）とは，集合 X と X 上の前順序 $\leq$ の組 $(X, \leq)$ のこと．

定義 4.3 ($\mathbf{PreOrd_{int,idref}}$)**.** $\mathbf{PreOrd_{int,idref}}$ とは以下からなる圏である．

- 対象は前順序集合．
- $(X, \leq)$ から $(X', \leq')$ への射 f は単調写像であり，中間値の性質と恒等反映的を満たすもの．恒等反映的（*Id-reflecting*）とは，すなわち，もし $x \leq y$ かつ $f(x) = f(y)$ のとき，$x = y$ となることである．

定義 4.4 (単位的部分集合)**.** 部分的半群 $(X, \cdot)$ の単位的部分集合（*unital subset*）とは，以下の条件を満たす $U \subseteq X$ のこと．

1. もし $u \in U$ と $x \in X$ について $u \cdot x$ が定義されているとき，$u \cdot x = x$ が成り立つ．

2. もし $u \in U$ と $x \in X$ について $x \cdot u$ が定義されているとき，$x \cdot u = x$ が成り立つ．

3. 任意の $x \in X$ に対して，$u \cdot x$ が定義されるような $u \in U$ が存在する．

4. 任意の $x \in X$ に対して，$x \cdot u$ が定義されるような $u \in U$ が存在する．

定義 4.5 (単位的部分的半群)**.** 単位的部分的半群（*unital partial semigroup*）とは以下のことを満たす組 $(X, \cdot, U)$ のこと．

1. $(X, \cdot)$ は部分的半群，

2. U は $(X, \cdot)$ の単位的部分集合．

定義 4.6 ($\mathbf{UPSG_{div}}$)**.** $\mathbf{UPSG_{div}}$ とは以下からなる圏である．

- 対象は単位的部分的半群．
- $(X, \cdot, U)$ から $(X', \cdot', U')$ の射は，任意の $x \in X$ に対して，$x \in U \Leftrightarrow f(x) \in U'$ となるような射 $f : (X, \cdot) \to (X', \cdot') \in \mathbf{PSG_{div}}$．

例 4.7. 任意の集合 A に対して，例 3.3 を拡張した $(\Delta_A, ;, \Delta_A)$，$(A, \cdot, A)$ と $f : (\Delta_A, ;, \Delta_A) \to (A, \cdot, A)$ は，$\mathbf{UPSG_{div}}$ の対象と射である．

例 4.8. 任意の集合 A に対して，例 3.4 を拡張した $(R, ;, \Delta_{A\times A})$，$(A \times A, ;, \Delta_A)$ と $f : (R, ;, \Delta_{A\times A}) \to (A \times A, ;, \Delta_A)$ は，$\mathbf{UPSG_{div}}$ の対象と射である．

例 4.9. 任意の集合 A に対して，例 3.5 を拡張した $(R, ;, \Delta_{A^*})$，$(A^*, \cdot, \{\varepsilon\})$ と $f : (R, ;, \Delta_{A^*}) \to (A^*, \cdot, \{\varepsilon\})$ は，$\mathbf{UPSG_{div}}$ の対象と射である．

定理 4.10. 定理 3.6 の関手 $\mathbf{comp}$ を以下のように拡張したものは $\mathbf{PreOrd_{int,idref}}$ から $\mathbf{UPSG_{div}}$ への関手となる．

- $\mathbf{PreOrd_{int}}$ の対象 $(X, \leq)$ に対して，$\mathbf{comp}(X, \leq) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\leq, ;, \Delta_X)$ とする．ここで，$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ とする．
- $\mathbf{PreOrd_{int,idref}}$ の射 $f : (X, \leq) \to (X', \leq')$ に対して，$\mathbf{comp}(f) : (\leq, ;, \Delta_X) \to (\leq', ;, \Delta_{X'})$ は (x, y) を $(f(x), f(y))$ に写すものとする．

証明．$\mathbf{PreOrd_{int,idref}}$ の射 $f : (X, \leq) \to (X', \leq')$ をとる．$\mathbf{comp}(f)$ が $\mathbf{UPSG_{div}}$ の射 $\mathbf{comp}(f) : (\leq, ;, \Delta_X) \to (\leq', ;, \Delta_{X'})$ となることを示す．$(x, y) \in \Delta_X$ のとき，$x = y$，$\mathbf{comp}(f)(x, y) = (f(x), f(y)) = (f(x), f(x)) \in \Delta_{X'}$．逆に，$f(x) = f(y)$ と f が恒等反映的であることから，$\mathbf{comp}(f)(x, y) = (f(x), f(y)) \in \Delta_{X'}$ のとき，$x = y$，$(x, y) \in \Delta_X$．したがって，$(x, y) \in \Delta_X \Leftrightarrow \mathbf{comp}(x, y) \in \Delta_{X'}$．よって，$\mathbf{comp}$ が $\mathbf{PreOrd_{int,idref}}$ から $\mathbf{UPSG_{div}}$ への関手となる． $\square$

ここまでは，3 節の圏に追加条件を加え，前順序と

単位的部分的半群を用いた圏，その間の関手 **comp** を説明した．次にべき集合クオンテール間の単位的クオンテール準同型を用いた圏と関手 $\wp$ を説明する．

定義 4.11 (単位的クオンテール)**.** 単位的クオンテール（*unital quantale*）とは以下のことを満たす組 $(Q,\leq,\vee,\odot,1)$ のこと．

1. $(Q,\leq,\vee,\odot)$ はクオンテールである．
2. $1\in Q$ は任意の $q\in Q$ に対して，$1\odot q=q=q\odot 1$ を満たす．

定義 4.12 (べき集合クオンテール)**.** べき集合クオンテール（*powerset quantale*）とは最初の 3 つが集合 Q のべき集合 $\wp(Q)$，包含関係 $\subseteq$，和集合演算 $\cup$ である単位的クオンテールのこと．

定義 4.13 (**PowersetQt**)**.** **PowersetQt** とは以下からなる圏である．

- 対象はべき集合クオンテール．
- $(\wp(Q),\subseteq,\cup,\odot,1)$ から $(\wp(Q'),\subseteq',\cup',\odot',1')$ への射 f は単位的準同型であり，単位的準同型（*unital homomorphism*）とは $f(1)=1'$ を満たしている $(\wp(Q),\leq,\vee,\odot)$ から $(\wp(Q'),\leq',\vee',\odot')$ への準同型 f のこと．

定理 4.14. 定理 3.8 の関手 $\wp$ を以下のように拡張したものは $\mathbf{UPSG_{div}}^{op}$ から **PowersetQt** への関手となる．

- $\mathbf{UPSG_{div}}$ の対象 $(X,\cdot,U)$ に対して，
$\wp(X,\cdot,U)\stackrel{\mathrm{def}}{=}(\wp(X),\subseteq,\cup,[\cdot],U)$ である．
- $\mathbf{UPSG_{div}}$ の射 $f:(X,\cdot,U)\to(X',\cdot',U')$ に対して，$\wp(f):\wp(X',\cdot',U')\to\wp(X,\cdot,U)$ は写像 $\wp(f)(S')=\{x\in X\mid f(x)\in S'\}$．

証明．はじめに，$(\wp(X),\subseteq,\cup,[\cdot],U)$ が **PowersetQt** の対象であることを示す．

- $U\in Q$ が任意の $S\in\wp(X)$ に対して，$U\,[\cdot]\,S=S=S[\cdot]U$ を満たし，U が $[\cdot]$ の単位元であることを示す，定義 4.4 の条件 1 より $U\,[\cdot]\,S\subseteq S$，条件 2 より $S\,[\cdot]\,U\subseteq S$，条件 1 と 3 より $S\subseteq U\,[\cdot]\,S$，条件 2 と 4 より $S\subseteq S\,[\cdot]\,U$．したがって，U は $[\cdot]$ の単位元である．よって，$(\wp(X),\subseteq,\cup,[\cdot],U)$ は **PowersetQt** の対象である．

次に，$\wp(f):\wp(X',\cdot',U')\to\wp(X,\cdot,U)$ が **PowersetQt** の射であることを示す．

- $\mathbf{UPSG_{div}}$ の射 $f:(X,\cdot,U)\to(X',\cdot',U')$ に対して，$\wp(f)(U')=U$ となることを示す．$x\in U\Leftrightarrow f(x)\in U'$ より，$\wp(f)(U')=U$．したがって $\wp(f)$ は単位的準同型となり，$\wp$ が $\mathbf{UPSG_{div}}^{op}$ から **PowersetQt** への関手となる．

□

5 べき集合クオンテールと関係埋め込みの例

5 節では，べき集合クオンテールの 4 種類の例と，それらの関係埋め込みの例を挙げる．

例 5.1. 集合 A に対して，$(\wp(A),\subseteq,\cup,\cap,A)$ はべき集合クオンテールである．ただし，$X\cap Y$ は X と Y の共通部分．

例 5.2. 集合 A に対して，$(\wp(A\times A),\subseteq,\cup,\circ,\Delta_A)$ はべき集合クオンテールである．ただし，$\circ$ は二項関係の合成，Δ_A は恒等関係．

例 5.3. 集合 A に対して，$(\wp(A^*),\subseteq,\cup,\circledcirc,\{\varepsilon\})$ はべき集合クオンテールである．ただし，A^* は A の元の有限列全体，ε は空列，$\circledcirc$ は言語の連接．

例 5.4. 組 $(\wp(\{0,1\}),\subseteq,\cup,\odot,\{1\})$ はべき集合クオンテールである．ただし，

$X\odot Y\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{z\mid\exists x\in X.\exists y\in Y.z\in\{x\}\star\{y\}\}$，
$\{0\}\star\{0\}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{0,1\}$，$\{0\}\star\{1\}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{0\}$，
$\{1\}\star\{0\}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{0\}$，$\{1\}\star\{1\}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{1\}$．

以下では，べき集合クオンテールの関係埋め込みについて考察する．

定義 5.5 (べき集合クオンテールの関係埋め込み)**.** べき集合クオンテール $(\wp(A),\subseteq,\cup,\odot,1)$ の関係埋め込みとは，写像 $\eta:\wp(A)\mapsto\wp(A\times A)$ で $\eta(S)=\{(a,b)\mid a\in A.b\in\{a\}\odot S\}$ のこと．

命題 5.6. η は $(\wp(A),\subseteq,\cup,\odot,1)$ から $(\wp(A\times A),\subseteq,\cup,\circ,\Delta_A)$ への単射な準同型である．すなわち，

- 任意の $\alpha\subseteq\wp(A)$ に対し，$\eta(\cup\alpha)=\cup\{\eta(S)\mid S\in\alpha\}$，
- 任意の $S_1,S_2\subseteq A$ に対し，$\eta(S_1\odot S_2)=\eta(S_1)\circ(S_2)$，
- $\eta(1)=\Delta_A$，
- 任意の $S_1,S_2\subseteq A$ に対し，$\eta(S_1)=\eta(S_2)$ ならば $S_1=S_2$．

証明.

- $(a,b)\in\eta(\cup\alpha)$
  $\Leftrightarrow a\in A, b\in\{a\}\odot\cup\alpha$
  $\Leftrightarrow a\in A, b\in\cup\{\{a\}\odot S\mid S\in\alpha\}$
  $\Leftrightarrow a\in A, \exists S\in\alpha.b\in\{a\}\odot S$
  $\Leftrightarrow \exists S\in\alpha.(a,b)\in\eta(S)$
  $\Leftrightarrow (a,b)\in\cup\{\eta(S)\mid S\in\alpha\}$
- $(a,c)\in\eta(S_1\odot S_2)$
  $\Leftrightarrow a\in A, c\in\{a\}\odot(S_1\odot S_2)$
  $\Leftrightarrow a\in A, c\in(\{a\}\odot S_1)\odot S_2$
  $\Leftrightarrow a\in A, c\in(\cup\{\{b\}\mid b\in\{a\}\odot S_1\})\odot S_2$
  $\Leftrightarrow a\in A, c\in\cup\{\{b\}\odot S_2\mid b\in\{a\}\odot S_1\}$
  $\Leftrightarrow \exists b\in\{a\}\odot S_1, a\in A, c\in\{b\}\odot S_2$
  $\Leftrightarrow \exists b.(a,b)\in\eta(S_1).(b,c)\in\eta(S_2)$
  $\Leftrightarrow (a,c)\in\eta(S_1)\circ\eta(S_2)$
- $(a,b)\in\eta(1)$
  $\Leftrightarrow a\in A, b\in\{a\}\odot 1$
  $\Leftrightarrow a\in A, b\in\{a\}$
  $\Leftrightarrow a\in A, a=b$
  $\Leftrightarrow (a,b)\in\Delta_A$
- $S_1,S_2\subseteq A$ が $\eta(S_1)\subseteq\eta(S_2)$ を満たすと仮定する．$x\in S_1$ をとる．$x\in S_2$ であればよい．
  $x\in S_1$
  $\Leftrightarrow x\in 1\odot S_1$
  $\Leftrightarrow x\in(\cup\{\{a\}\mid a\in 1\})\odot S_1$
  $\Leftrightarrow x\in\cup\{\{a\}\odot S_1\mid a\in 1\}$
  $\Leftrightarrow \exists a\in 1.x\in\{a\}\odot S_1$
  $\Leftrightarrow \exists a\in 1.(a,x)\in\eta(S_1)$
  $\Rightarrow \exists a\in 1.(a,x)\in\eta(S_2)$
  $\Leftrightarrow \exists a\in 1.x\in\{a\}\odot S_2$
  $\Leftrightarrow x\in\cup\{\{a\}\odot S_2\mid a\in 1\}$
  $\Leftrightarrow x\in(\cup\{\{a\}\mid a\in 1\})\odot S_2$
  $\Leftrightarrow x\in 1\odot S_2$
  $\Leftrightarrow x\in S_2$

□

例 5.1〜5.4 のべき集合クオンテールの関係埋め込みの様子を述べておく．

例 5.7. 例 5.1 で与えたべき集合クオンテール $(\wp(A),\subseteq,\cup,\cap,A)$ の関係埋め込みは $S\subseteq A$ に対して

$$\eta(S)=\{(a,b)\mid a\in A.b\in\{a\}\cap S\}$$
$$=\{(a,a)\mid a\in S\}.$$

例 5.8. 例 5.2 で与えたべき集合クオンテール $(\wp(A\times A),\subseteq,\cup,\circ,\Delta_A)$ の関係埋め込みは $S\subseteq A\times A$ に対して

$$\eta(S)=\{(x,y)\mid(x,y)\in A\times A.(w,z)\in\{(x,y)\}\circ S\}$$
$$=\{((x,y),(x,z))\mid(x,y)\in A\times A.(y,z)\in S\}$$
$$=\{((x,y),(x,z))\mid x\in A.(y,z)\in S\}.$$

例 5.9. 例 5.3 で与えたべき集合クオンテール $(\wp(A^*),\subseteq,\cup,\circledcirc,\{\varepsilon\})$ の関係埋め込みは $S\subseteq A^*$ に対して

$$\eta(S)=\{(\sigma,\pi)\mid\sigma\in A^*.\pi\in\{\sigma\}\circledcirc S\}$$
$$=\{(\sigma,\sigma\tau)\mid\sigma\in A^*.\tau\in S\}.$$

例 5.10. 例 5.4 で与えたべき集合クオンテール $(\wp(\{0,1\}),\subseteq,\cup,\odot,\{1\})$ の関係埋め込みは

- $\eta(\emptyset)=\emptyset$
- $\eta(\{0\})=\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$
- $\eta(\{1\})=\{(0,0),(1,1)\}$
- $\eta(\{0,1\})=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

6 関手と関係埋め込みとの関係性

6 節では，4 節の関手と 5 節の例との関係性を述べる．例 5.7〜例 5.9 のべき集合クオンテールの写像 η が $\wp$ による像になっていることを以下に示す．

命題 6.1. 例 5.7 の写像 η は $\wp$ による例 4.7 の射 f の像になっている．

証明．任意の $S\subseteq A$ に対して，

$$\wp(f)(S)=\{(a,a)\in\Delta_A\mid a\in A, f(a,a)\in S\}$$
$$=\{(a,a)\mid a\in S\}$$

よって，$\eta(S)=\wp(f)(S)$ となり，η は $\wp$ による f の像となる． □

命題 6.2. 例 5.8 の写像 η は $\wp$ による例 4.8 の射 f の像になっている．

証明．任意の $S\subseteq A$ に対して，

$$\wp(f)(S)=\{(a,b)\in R\mid f(a,b)\in S\}$$
$$=\{((x,y),(x,z))\mid x\in A.((x,y),(x,z))\in R.(y,z)\in S\}$$

$$= \{((x,y),(x,z)) \mid x \in A.(y,z) \in S\}$$

よって，$\eta(S) = \wp(f)(S)$ となり，η は $\wp$ による f の像となる． □

命題 6.3. 例 5.9 の写像 η は $\wp$ による例 4.9 の射 f の像になっている．

証明．任意の $S \subseteq A$ に対して，

$$\begin{aligned}\wp(f)(S) &= \{(a,b) \in R \mid f(a,b) \in S\} \\ &= \{(\sigma, \sigma{\cdot}\tau) \mid \sigma \in A^*.(\sigma, \sigma{\cdot}\tau) \in R.\tau \in S\} \\ &= \{(\sigma, \sigma \cdot \tau) \mid \sigma \in A^*.\tau \in S\}\end{aligned}$$

よって，$\eta(S) = \wp(f)(S)$ となり，η は $\wp$ による f の像となる． □

命題 6.4. 例 5.4 で与えたべき集合クオンテール $(\wp(\{0,1\}), \subseteq, \cup, \odot, \{1\})$ は $\wp$ による像にならない．

証明．$\wp(\{0,1\}, [\cdot], \{1\}) = (\wp(\{0,1\}), \subseteq, \cup, [\cdot], \{1\}) = (\wp(\{0,1\}), \subseteq, \cup, \odot, \{1\})$ を満たす $[\cdot]$ があるとすると，$\{0\}[\cdot]\{0\} = \{0\}\odot\{0\} = \{0,1\}$ となる．一方で，$[\cdot]$ の定義より，$0[\cdot]0$ が定義されるなら $\{0\}[\cdot]\{0\} = \{0\}$，$0[\cdot]0$ が定義されないなら $\{0\}[\cdot]\{0\} = \emptyset$ である．よって $\{0\}[\cdot]\{0\}$ は 2 点集合にならない． □

7 まとめ

弱前順序，部分的半群，クオンテールを用いた圏とその間の関手を定義した．さらに 4 つの例を用いてそれら関手とべき集合クオンテールの関係埋め込みとの関係性を示した．それぞれの圏と関手の関係を図に表すと図 1 のようになる．しかし, 命題 6.2 より写像 η が $\wp$ による像にならないべき集合クオンテールが存在することがわかった．このことから関手 **comp** と $\wp$ を合成した関手 $\wp \circ$ **comp** は同型という強い相互変換にならないことが判明した．今後の課題として，同型ではなく随伴関手など少し弱い相互変換を探すことも考えられる．

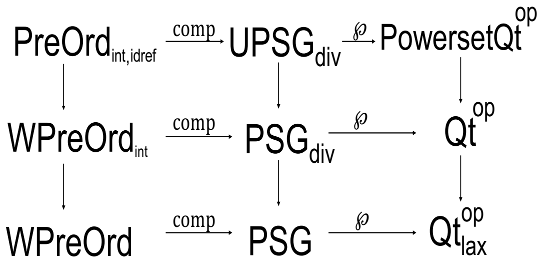

図 1　見つけた圏と関手

参 考 文 献

[1] 古澤 仁, 高井 利憲: クリーニ代数入門, コンピュータソフトウェア, Vol.23, No.3(2006), pp.14-34.

[2] Nishizawa, K. and Furusawa, H.: Relational Representation Theorem for Powerset Quantales, Relational and Algebraic Methods in Computer Science - 13th International Conference, RAMiCS 2012, Cambridge, UK, September 17-20, 2012. Proceedings, Lecture Notes in Computer Science, 7560, 207–218, Springer, 2012.

[3] Nishizawa, K., Yasuda, K., Furusawa, H.: Preorders, Partial Semigroups, and Quantales, Relational and Algebraic Methods in Computer Science - 18th International Conference, RAMiCS 2020, Palaiseau, France, April 8-11, 2020, Proceedings, Lecture Notes in Computer Science, 12062, 237–252, Springer, 2020.

[4] Johnstone, P.T.: Stone Spaces, 9780521337793, lc82004506, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1986, Cambridge University Press.