Monoidal t-norm 論理の Curry-Howard 対応

木村 武志　河口 万由香　田中 章

Monoidal t-norm 論理とは Gödel 論理から縮約規則を取り除いた部分構造論理である．本稿では，Aschieri らによる，Gödel 論理に Curry-Howard 対応するλ計算に基づき，Monoidal t-norm 論理に対応するλ計算 λ_{MT} を導入する．λ_{MT} は Affine 型システムの resource-sensitivity に並列計算を組み合わせた表現力を持つ．λ_{MT} の主部簡約と部分論理式性を証明し，Aschieri らの弱正規化性の証明手法が λ_{MT} では乗法的連言の存在により適用できないことを述べる．

Monoidal t-norm logic is a substructural logic which we obtain by removing contraction rule from Gödel logic. Based on λ calculus by Aschieri *et al.* which is in Curry-Howard correspondence with Gödel logic, we introduce λ calculus λ_{MT} which corresponds to monoidal t-norm logic. λ_{MT} has expressiveness of affine type system's resource-sensitivity combined with concurrency. We prove subject reduction and subformula property and discuss that the proof method of weak normalization by Aschieri *et al.* does not work for λ_{MT} due to the presence of multiplicative conjunctions.

1 はじめに

直観主義論理や古典論理の自然演繹や Sequent 計算から交換・弱化・縮約規則の 1 つ以上を取り除いて得られる論理を**部分構造論理**と総称する [10]．表 1 に示す通り部分構造論理では仮定（$\Gamma \vdash A$ の Γ）の使用に制限が生ずる．

古典論理では論理式に $\{0, 1\}$ の値を与える意味論を考えられるが，これを $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$ に一般化した意味論を与える論理が広く考えられており，**実数値論理**（Fuzzy 論理・無限多値論理）と総称される．実数値論理は構文論的には多くの場合前線形性 $(A \to B) \vee (B \to A)$ を持つ論理として実現される [9]．これは意味論的に $\mathbb{R}$ に入る全順序の完全性に対応する．

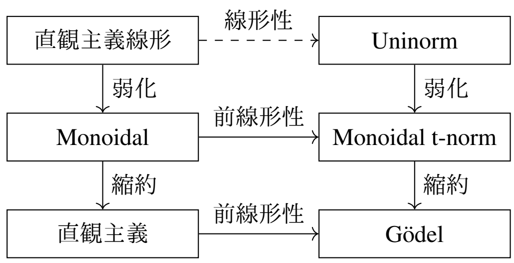

図 1　論理と公理の関係（矢印は定理の集合としての包含関係）

図 1 に部分構造論理・実数値論理の幾つかとその関係を示す †1．

Monoidal t-norm 論理 [5] は縮約のみを持たない部分構造論理であり実数値論理である．これは左連続な三角型ノルム（t-ノルム）を用いて意味論上公理化される多くの実数値論理の一般化として導入された．

Curry-Howard 対応（CH 対応）とは論理と型付き計算の対応である．当初 CH 対応は直観主義論理と単純型付きλ計算との間に発見され [7]，その後他の論理

Curry-Howard Correspondence for Monoidal T-Norm Logic
Takeshi Kimura, 北海道大学大学院情報科学研究科情報理工学専攻, Div. of Computer Science and Information Technology, Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University.
Mayuka F. Kawaguchi, Akira Tanaka, 北海道大学大学院情報科学研究院情報理工学部門, Div. of Computer Science and Information Technology, Faculty of Information Science and Technology, Hokkaido University.

†1　Monoidal 論理は直観主義 Affine 論理と，Gödel 論理は Gödel-Dummett 論理とも呼ばれる．

表 1　部分構造論理における制限（$\otimes$ は連言）

除く規則	仮定の制限	例
交換	順序を変えられない	$A \otimes B \nvdash B \otimes A$
弱化	それぞれ 1 回以下しか使えない	$A \nvdash A \otimes A$
縮約	それぞれ 1 回以上しか使えない	$A \otimes B \nvdash A$

についても検討が進み様々な性質を持つ計算体系が導入された．

部分構造論理に CH 対応する計算は部分構造型システム [11] を持つものとして知られており，仮定の使用の制限を変数の使用の制限として反映する．この性質を resource-sensitivity と呼ぶ．これはデータが使用される順序や回数を細かく制御する必要の有るプログラム（例えばメモリ管理）に応用されている．

実数値論理の持つ前線型性公理は何らかの並列計算に CH 対応すると見られている [3]．特に Gödel 論理については，実際に多くの並列計算体系が検討されている [6] [1] [2]．中でも本研究の基礎である NG, λ_G [2] は Hypersequent でなく単純な自然演繹に基づく点や弱正規化性が成立し解析的である点などにおいて優れている．本研究ではかかる体系を元に，弱化を持つ Monoidal 論理に前線形性を加えた *Monoidal t-norm* 論理の CH 対応を考えることで resource-sensitivity と並列計算の能力を併せ持つ λ 計算を導入する．

直観主義論理に前線形性を加える方がより単純で妥当にも思えるが，これに最も近い Uninorm 論理はより強い線型性公理 $((A \to B) \wedge \top) \vee ((B \to A) \wedge \top)$ を要求し，これは推論規則への変換や計算的な意味付けが難しいと予想される．従って本研究では先ず Monoidal t-norm 論理を対象とした．

2　論理体系

本節では Monoidal t-norm 論理 MT の自然演繹を導入しそれが既知の Hilbert 流体系と同等であることを示す．

形式体系 S について $\vdash_S$ はその導出可能性関係を表すとする．誤解のおそれが無いとき添え字を省くことが有る．

X を命題変数の集合を動くメタ変数とする．論理式の集合 Fm を次の BNF で定義する．

$$\mathrm{Fm} \ni A, B, C ::= X \mid A \multimap A \mid \mathbf{1} \mid A \otimes A \mid \top \mid A \mathbin{\&} A \mid \mathbf{0} \mid A \oplus A$$

本稿では指数的論理式 $!A$ を扱わない．

Γ, Δ を論理式の有限多重集合の集合を動くメタ変数とする．これらは Sequent 中で環境として使われるのだが，線形論理や Monoidal t-norm 論理が縮約を持たず交換を持つことを反映する為に集合や列でなく個数を区別し順序を無視する多重集合とした．$\Gamma \uplus \Delta$ や $\Gamma \uplus \{A\}$ をそれぞれ Γ, Δ や Γ, A と書くことが有る．但し $\uplus$ は多重集合の非交和である（即ち $\chi_\Gamma(A)$ を多重集合 Γ が持つ A の個数とするとき，$\chi_{\Gamma \uplus \Delta}(A) = \chi_\Gamma(A) + \chi_\Delta(A)$ となる）．

始めに Bierman [4] を元に直観主義線形論理 IL の体系を導入する．

定義 1. IL の Hilbert 流体系 $\mathcal{H}_{\mathrm{IL}}$ を次の推論規則の集まりで定義する．

$$\frac{}{A \vdash A}\ \mathrm{Id}$$

$$\frac{}{\vdash （公理型）}\ （公理型名）$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \multimap B \qquad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}\ \multimap\text{-E}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \mathbin{\&} B}\ \&\text{-I}$$

但し公理型は

$$(A \multimap B) \multimap (B \multimap C) \multimap A \multimap C \qquad \text{(comp)}$$
$$(A \multimap B \multimap C) \multimap B \multimap A \multimap C \qquad \text{(flip)}$$
$$A \multimap A \qquad \text{(id)}$$
$$\mathbf{1} \qquad (\mathbf{1}\text{-I})$$
$$A \multimap \mathbf{1} \multimap A \qquad \text{(unit)}$$
$$A \multimap B \multimap A \otimes B \qquad \text{(tensor)}$$
$$(A \multimap B \multimap C) \multimap A \otimes B \multimap C \qquad \text{(uncurry)}$$
$$A \multimap \top \qquad \text{(term)}$$
$$(A \multimap B) \mathbin{\&} (A \multimap C) \multimap A \multimap B \mathbin{\&} C \qquad \text{(prod)}$$

$$A_0 \mathbin{\&} A_1 \multimap A_i \qquad \text{(proj-}i\text{)}$$
$$\mathbf{0} \multimap A \qquad \text{(coterm)}$$
$$(A \multimap C) \mathbin{\&} (B \multimap C) \multimap A \oplus B \multimap C \qquad \text{(coprod)}$$
$$A_i \multimap A_0 \oplus A_1 \qquad \text{(coproj-}i\text{)}$$
のいずれかである[†2].

定義 2. IL の自然演繹 $\mathcal{N}_{\mathrm{IL}}$ を次の推論規則の集まりで定義する.

$$\dfrac{}{A \vdash A}\ \mathrm{Id}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\ {\multimap}\text{-I} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \multimap B \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}\ {\multimap}\text{-E}$$

$$\dfrac{}{\vdash \mathbf{1}}\ \mathbf{1}\text{-I} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{1} \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash A}\ \mathbf{1}\text{-E}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}\ {\otimes}\text{-I} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \otimes B \quad \Delta, A, B \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}\ {\otimes}\text{-E}$$

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\ {\top}\text{-I}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \mathbin{\&} B}\ {\&}\text{-I} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A_0 \mathbin{\&} A_1}{\Gamma \vdash A_i}\ {\&}\text{-E-}i$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{0}}{\Gamma \vdash A}\ \mathbf{0}\text{-E}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A_i}{\Gamma \vdash A_0 \oplus A_1}\ {\oplus}\text{-I-}i$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \mathbin{\&} B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}\ {\oplus}\text{-E}$$

次の補題は Bierman [4] の結果から容易に示される.

補題 1.

$$\vdash_{\mathcal{H}_{\mathrm{IL}}} = \vdash_{\mathcal{N}_{\mathrm{IL}}}$$

定義 3. MT の Hilbert 流体系 $\mathcal{H}_{\mathrm{MT}}$ を $\mathcal{H}_{\mathrm{IL}}$ に次の公理型を加えたものとして定義する.

$$A \multimap B \multimap A \qquad \text{(const)}$$
$$((A \multimap B) \multimap C) \multimap ((B \multimap A) \multimap C) \multimap C \qquad \text{(prelin)}$$

これは t-ノルムによる健全で完全な代数的意味論を与えられた体系 [9] に一致する.

定義 4. MT の自然演繹 $\mathcal{N}_{\mathrm{MT}}$ を $\mathcal{N}_{\mathrm{IL}}$ に次の推論規則を加えたものとして定義する.

$$\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ \mathrm{W}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \multimap B \vdash C \quad \Gamma, B \multimap A \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}\ \mathrm{Com}$$

Com は Aschieri ら [2] を元に定義したが，乗法的だったものをここでは加法的規則としている．これは Gödel 論理と Monoidal t-norm 論理の，即ち直観主義論理と Monoidal 論理の選言の違いに基づく．

MT の二つの体系を定義したので，それらの証明力の等しさを示す．

定理 1.

$$\vdash_{\mathcal{H}_{\mathrm{MT}}} = \vdash_{\mathcal{N}_{\mathrm{MT}}}$$

証明. $\vdash_{\mathcal{N}_{\mathrm{IL}},\mathrm{const}} = \vdash_{\mathcal{N}_{\mathrm{IL}},\mathrm{W}}$ を示す.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash B \multimap A \multimap B}\ \mathrm{const} \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\ {\multimap}\text{-E} \quad \dfrac{}{A \vdash A}\ \mathrm{Id}}{\Gamma, A \vdash B}\ {\multimap}\text{-E}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ \mathrm{Id}}{A, B \vdash A}\ \mathrm{W}}{A \vdash B \multimap A}\ {\multimap}\text{-I}}{\vdash A \multimap B \multimap A}\ {\multimap}\text{-I}$$

$\vdash_{\mathcal{N}_{\mathrm{IL}},\mathrm{const},\mathrm{prelin}} = \vdash_{\mathcal{N}_{\mathrm{IL}},\mathrm{W},\mathrm{Com}}$ を示す．図 2 を見よ．

補題 1 と以上より示された. ■

3 λ 計算

本節では，前節の $\mathcal{N}_{\mathrm{MT}}$ に証明項を与える計算体系 λ_{MT} を導入する．以降は簡単の為 $(\multimap, \mathbf{1}, \otimes)$-断片を考える．

a, b, x, y, z を**変数**の集合を動くメタ変数とする．**項**の集合 Tm を次の BNF で定義する．

$$\begin{aligned} \mathrm{Tm} \ni t, u ::= {} & x^A \\ & \mid \mathtt{fun}\ x^A.t \mid t\ t \\ & \mid \langle\!\langle\rangle\!\rangle \mid \mathtt{case}\ t\ \mathtt{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.t \\ & \mid \langle\!\langle t,t \rangle\!\rangle \mid \mathtt{case}\ t\ \mathtt{of}\ \langle\!\langle x^A, x^A \rangle\!\rangle.t \\ & \mid t \parallel_a^{A,A} t \end{aligned}$$

項として扱われる変数は常に陽に型註釈されるが，誤

†2 comp・flip・id はそれぞれ B・C・I とも呼ばれる.

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash ((A \multimap B) \multimap C) \multimap ((B \multimap A) \multimap C) \multimap C}\,\text{prelin} \qquad \dfrac{\Gamma, A \multimap B \vdash C}{\Gamma \vdash (A \multimap B) \multimap C}\,{\multimap}\text{-I}}{\dfrac{\Gamma \vdash ((B \multimap A) \multimap C) \multimap C \qquad \dfrac{\Delta, B \multimap A \vdash C}{\Delta \vdash (B \multimap A) \multimap C}\,{\multimap}\text{-I}}{\Gamma, \Delta \vdash C}\,{\multimap}\text{-E}}\,{\multimap}\text{-E}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(A \multimap B) \multimap C \vdash (A \multimap B) \multimap C}\,\text{Id} \quad \dfrac{}{A \multimap B \vdash A \multimap B}\,\text{Id}}{A \multimap B, (A \multimap B) \multimap C \vdash C}\,{\multimap}\text{-E}}{A \multimap B, (A \multimap B) \multimap C, (B \multimap A) \multimap C \vdash C}\,\text{W}}{A \multimap B, (A \multimap B) \multimap C \vdash ((B \multimap A) \multimap C) \multimap C}\,{\multimap}\text{-I}}{A \multimap B \vdash ((A \multimap B) \multimap C) \multimap ((B \multimap A) \multimap C) \multimap C}\,{\multimap}\text{-I} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(B \multimap A) \multimap C \vdash (B \multimap A) \multimap C}\,\text{Id} \quad \dfrac{}{B \multimap A \vdash B \multimap A}\,\text{Id}}{B \multimap A, (B \multimap A) \multimap C \vdash C}\,{\multimap}\text{-E}}{B \multimap A, (A \multimap B) \multimap C, (B \multimap A) \multimap C \vdash C}\,\text{W}}{B \multimap A, (A \multimap B) \multimap C \vdash ((B \multimap A) \multimap C) \multimap C}\,{\multimap}\text{-I}}{B \multimap A \vdash ((A \multimap B) \multimap C) \multimap ((B \multimap A) \multimap C) \multimap C}\,{\multimap}\text{-I}}{\vdash ((A \multimap B) \multimap C) \multimap ((B \multimap A) \multimap C) \multimap C}\,\text{Com}$$

図 2　prelin と Com の相互導出

解のおそれが無いときは省くことが有る．

$\|$ を含む項を**通信的**であると言う．通信的でないことを **非通信的** と言う．$t_0 \|_a t_1$ は，直観的にはプロセス t_0, t_1 がチャンネル a を通じてデータを交換することを表す．このことは後述する cross 簡約によって明らかになる．

$\mathrm{fv}(t)$ は t の自由変数の集合を表すとする．

次のマクロを定義する．

$$\langle\!\langle t_0, \ldots, t_{n-1} \rangle\!\rangle$$
$$= \langle\!\langle t_0, \langle\!\langle t_1, \ldots, t_{n-1} \rangle\!\rangle \rangle\!\rangle$$
$$\mathsf{case}\ t\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle\!\rangle.u$$
$$= \mathsf{case}\ t\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle x_0, y \rangle\!\rangle.\mathsf{case}\ y\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle\!\rangle.u$$

但し最後の式は $y \notin \mathrm{fv}(u)$ のときに限る．

以降，Γ, Δ は論理式でなく変数と論理式の対（x^A と書く）の多重集合の集合を動くとする．

$\mathrm{lookup}(\Gamma, x) = \{A \mid x^A \in \Gamma\}$ とする．型付け規則を次の通り定義する．

$$\dfrac{}{x^A \vdash x^A : A}\,\text{Id}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash t : B}{\Gamma, x^A \vdash t : B}\,\text{W} \quad \text{但し } \mathrm{lookup}(\Gamma, x) \subseteq \{A\}$$

$$\dfrac{\Gamma, x^A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \mathsf{fun}\ x^A.t : A \multimap B}\,{\multimap}\text{-I}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \multimap B \quad \Delta \vdash u : A}{\Gamma, \Delta \vdash t\,u : B}\,{\multimap}\text{-E}$$

$$\dfrac{}{\vdash \langle\!\langle\rangle\!\rangle : \mathbf{1}}\,\mathbf{1}\text{-I} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash t : \mathbf{1} \quad \Delta \vdash u : A}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{case}\ t\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.u : A}\,\mathbf{1}\text{-E}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \quad \Delta \vdash u : B}{\Gamma, \Delta \vdash \langle\!\langle t, u \rangle\!\rangle : A \otimes B}\,\otimes\text{-I}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \otimes B \quad \Delta, x^A, y^B \vdash u : C}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{case}\ t\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle x^A, y^B \rangle\!\rangle.u : C}\,\otimes\text{-E}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash a^{A \multimap B} \vdash t : C \quad \Gamma \vdash a^{B \multimap A} \vdash u : C}{\Gamma, \Delta \vdash t \|_a^{A,B} u : C}\,\text{Com}$$

以下に示す簡約及びそれに関する諸定義は[2] に基づく．

定義 5. A が**素**である $\iff$ いずれの B, C についても $A \neq B \otimes C$．

いずれの論理式 A も $n \geq 0$ 個の素な式を $n - 1$ 個の $\otimes$ で結合したものである．かかる素な式を A の**素因式**と呼ぶ．

定義 6. A の**強部分論理式**とは A の素な真部分論理式の真部分論理式である．

A の真部分論理式の集合を $\mathrm{propSubfm}(A)$ と，強部分論理式の集合を $\mathrm{strSubfm}(A)$ と，素因式の集合を $\mathrm{prFact}(A)$ と，長さを $\mathrm{lenFm}(A)$ と表す．

$\vec{x}$ は $x_0, \ldots, x_{n-1}$，$\vec{A}$ は $A_0, \ldots, A_{n-1}$，$\vec{x}^{\vec{A}}$ は $x_0^{A_0}, \ldots, x_{n-1}^{A_{n-1}}$ を何らかの n について表すとする．また，かかる列を順序を無視して多重集合として濫用することが有る．

定義 7. 非通信的な項 $t = t_0 \|_a^{C_0, C_1} t_1$ について $\vec{x}^{\vec{A}} \vdash t : B$ とする．$S = (\bigcup_i \mathrm{prFact}(C_i)) \setminus (\bigcup_i \mathrm{strSubfm}(A_i)) \setminus \mathrm{propSubfm}(B)$ とする．t の**通信複雑性** $\mathrm{comComp}(t)$

は $\max(\{0\} \cup \{\mathrm{lenFm}(D) \mid D \in S\})$ である．

$\mathrm{comComp}(t) > 0$ は t の型付け木で部分論理式性が成立しないことを表し，簡約の指標となる．

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を文脈の集合を動くメタ変数とする．$\mathcal{A}[t]$ を，$\mathcal{A}$ の穴を t で（capture-avoiding 無しに）埋めた項とする．$[x \mapsto t]u$ を u 中の x のいずれの自由出現をも t で置換した項とする．

定義 8. t が **並列的** である $\iff$ 次のいずれかが成立する．

- t が非通信的である．
- いずれかの並列的な項 t_0, t_1 について $t = t_0 \parallel_a t_1$．

並列的な項 t は非通信的な項 $t_0, \ldots, t_{n-1}$ について括弧を取り除けば $t_0 \parallel_{a_0} \cdots \parallel_{a_{n-2}} t_{n-1}$ と書ける．これは言わば，全てのプロセスが単体での計算を終え通信の為に同期した状態である．

定義 9. Tm 上の**簡約**関係を図 3 の通り定義する．

直観的に説明する．β **簡約** $\succ_\beta$ は，一般的な（線形）λ 計算のそれと同様である．*permutation* **簡約** $\succ_\mathrm{p}$ は，並列的な項への変換である．*end* **簡約** †3 $\succ_\mathrm{e}$ は，通信的な項の中から通信を待っていないプロセスを選びそれを結果として返す．*cross* **簡約** $\succ_\mathrm{c}$ では，通信変数を通じてプロセス同士が項を送り合う．

通信を実現する簡約として素朴には $\mathcal{A}[t] \parallel_a \mathcal{B}[u] \succ \mathcal{A}[u] \parallel_a \mathcal{B}[t]$ が考えられるが，これだと t, u 中の束縛変数が自由になる問題が起こる．この *process migration* の問題を，Aschieri ら [2] は束縛を維持する為に新たにチャンネルを開く cross 簡約によって解決した．加法的連言の項を用いる λ_G の cross 簡約を，λ_MT では乗法的連言の項を用いるものに改変した．

例として，cross 簡約の交換される項が閉じている場合を次に示す．

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{A}[a\,t] \parallel_a^{A,B} \mathcal{B}[a\,u] \\
\succ_\mathrm{c}\ & (\mathcal{A}[a\,t] \parallel_a^{A,B} \mathcal{B}[\mathtt{case}\ b \langle\!\langle\rangle\!\rangle\ \mathtt{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.t]) \\
& \parallel_b^{C,D} (\mathcal{A}[\mathtt{case}\ b \langle\!\langle\rangle\!\rangle\ \mathtt{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.u] \parallel_a^{A,B} \mathcal{B}[a\,u]) \\
\succ^2_{\beta,\mathrm{ctx}} & (\mathcal{A}[a\,t] \parallel_a^{A,B} \mathcal{B}[t]) \parallel_b^{C,D} (\mathcal{A}[u] \parallel_a^{A,B} \mathcal{B}[a\,u]) \\
\succ_\mathrm{e}\ & \mathcal{A}[a\,t] \parallel_a^{A,B} \mathcal{B}[t]
\end{aligned}
$$

†3 [2] ではこれも cross 簡約と呼ばれていたが，議論を簡単にする為に区別して新たに命名した．

データ t がプロセス $\mathcal{B}$ に送られることを確認せよ．

$\xi \in \{\beta, \mathrm{p}, \mathrm{e}, \mathrm{c}\}$ について

$$t \succ_\xi u \implies \mathcal{A}[t] \succ_{\xi,\mathrm{ctx}} \mathcal{A}[u]$$

と定義する．$\succ_{\beta,\mathrm{p,e,c}} = \bigcup_\xi \succ_\xi$，$\succ = \bigcup_\xi \succ_{\xi,\mathrm{ctx}}$，と定義する．

命題 1 代入補題. $\Gamma, x^A \vdash t : B$ かつ $\Delta \vdash u : A \implies \Gamma, \Delta \vdash [x \mapsto u]t : B$.

証明. $\Gamma, x^A \vdash t : B$ 上の帰納法による． ■

命題 1 を，λ_MT が次の規則を持つかのように濫用する．

$$\frac{\Gamma, x^A \vdash t : B \qquad \Delta \vdash u : A}{\Gamma, \Delta \vdash [x \mapsto u]t : B}\ \mathrm{Sub}$$

定理 2 主部簡約. $\Gamma \vdash t : A$ かつ $t \succ u \implies \Gamma \vdash u : A$.

証明. cross 簡約についてのみ示す．図 4 を見よ．それ以外の簡約については容易に示される． ■

この証明が推論規則 W を要することに注目せよ．

4 部分論理式性

本節では，前節で定義した簡約によって得られる正規な項の型付け木では部分論理式性の変種が成立することを示す．

定義 10. t が**可約**である $\iff$ いずれかの u について $t \succ u$．特に $t \succ_\xi u$ のとき ξ-**可約**であると言う．可約でないことを**不可約**と言う．

定義 11. t が u 中で**除去される** $\iff$ u が $t\ u_1$, $\mathtt{case}\ t\ \mathtt{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.u_1$, $\mathtt{case}\ t\ \mathtt{of}\ \langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle.u_1$ のいずれかである．

命題 2 不可約非通信的項の自由変数の性質. 不可約で非通信的な項 t について $\vec{x}^{\vec{A}} \vdash t : B$ とする．いずれの i についても次のいずれかが成立する．

1. t 中の x_i のいずれの出現も除去される．
2. A_i は $\vec{A}$ のいずれかの真部分論理式である．
3. A_i は B の部分論理式である．

証明. i を固定する．t 上の帰納法により，

- $t = x_j$．場合分けにより，
  - $j = i$．A_i は $B = A_j = A_i$ の部分論理式なの

β 簡約

$$
\begin{array}{ll}
(\mathsf{fun}\ x.t)\ u & \succ_\beta [x \mapsto u]\ t \\
\mathsf{case}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.t & \succ_\beta t \\
\mathsf{case}\ \langle\!\langle t,u\rangle\!\rangle\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle.v & \succ_\beta [y \mapsto u]\ [x \mapsto t]\ v
\end{array}
$$

permutation 簡約

$$
\begin{array}{ll}
\mathsf{fun}\ x.(t \parallel_a t') & \succ_{\mathrm{p}} \mathsf{fun}\ x.t \parallel_a \mathsf{fun}\ x.t' \\
(t \parallel_a t')\ u & \succ_{\mathrm{p}} t\ u \parallel_a t'\ u \\
u\ (t \parallel_a t') & \succ_{\mathrm{p}} u\ t \parallel_a u\ t' \\
\mathsf{case}\ t \parallel_a t'\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.u & \succ_{\mathrm{p}} (\mathsf{case}\ t\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.u) \parallel_a (\mathsf{case}\ t'\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.u) \\
\mathsf{case}\ u\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.t \parallel_a t' & \succ_{\mathrm{p}} (\mathsf{case}\ u\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.t) \parallel_a (\mathsf{case}\ u\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.t') \\
\langle\!\langle t \parallel_a t',u\rangle\!\rangle & \succ_{\mathrm{p}} \langle\!\langle t,u\rangle\!\rangle \parallel_a \langle\!\langle t',u\rangle\!\rangle \\
\langle\!\langle u,t \parallel_a t'\rangle\!\rangle & \succ_{\mathrm{p}} \langle\!\langle u,t\rangle\!\rangle \parallel_a \langle\!\langle u,t'\rangle\!\rangle \\
\mathsf{case}\ t \parallel_a t'\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle.u & \succ_{\mathrm{p}} (\mathsf{case}\ t\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle.u) \parallel_a (\mathsf{case}\ t'\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle.u) \\
\mathsf{case}\ u\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle.(t \parallel_a t') & \succ_{\mathrm{p}} (\mathsf{case}\ u\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle.t) \parallel_a (\mathsf{case}\ u\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle.t') \\
(t \parallel_a t') \parallel_b u & \succ_{\mathrm{p}} (t \parallel_b u) \parallel_a (t' \parallel_b u) \quad \text{但し}\ \mathrm{comComp}((t \parallel_a t') \parallel_b u) > 0 \\
u \parallel_b (t \parallel_a t') & \succ_{\mathrm{p}} (u \parallel_b t) \parallel_a (u \parallel_b t') \quad \text{但し}\ \mathrm{comComp}(u \parallel_b (t \parallel_a t')) > 0
\end{array}
$$

end 簡約

$$
\begin{array}{l}
t \parallel_a u \succ_{\mathrm{e}} t \quad \text{但し}\ a \notin \mathrm{fv}(t) \\
u \parallel_a t \succ_{\mathrm{e}} t \quad \text{但し}\ a \notin \mathrm{fv}(t)
\end{array}
$$

cross 簡約

$$\mathcal{A}[a\ t] \parallel_a^{A,B} \mathcal{B}[a\ u] \succ_{\mathrm{c}} (\mathcal{A}[a\ t] \parallel_a^{A,B} \mathcal{B}[\mathsf{case}\ b\ \langle\!\langle \vec{y}\rangle\!\rangle\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle \vec{x}\rangle\!\rangle.t]) \parallel_b^{C,D} (\mathcal{A}[\mathsf{case}\ b\ \langle\!\langle \vec{x}\rangle\!\rangle\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle \vec{y}\rangle\!\rangle.u] \parallel_a^{A,B} \mathcal{B}[a\ u])$$

$\succ_{\mathrm{c}}$ は次の条件を満たすときに限る．

- $\mathrm{comComp}(\mathcal{A}[a\ t] \parallel_a \mathcal{B}[a\ u]) > 0$
- $\mathcal{A}[a\ t], \mathcal{B}[a\ u]$ は非通信的
- $\vec{x}^{\vec{C}}$（$\vec{y}^{\vec{D}}$）は t（u）で自由な，$\mathcal{A}[a\ t]$（$\mathcal{B}[a\ u]$）で束縛される出現の列
- $\mathcal{A}[a\ t], \mathcal{B}[a\ u]$ それぞれの穴を埋めている a は項の中で最右の出現
- $b \notin \{a\} \cup \mathrm{fv}(\mathcal{A}[a\ t]) \cup \mathrm{fv}(\mathcal{B}[a\ u])$

図 3　簡約

で，3. が成立する．

  – $j \neq i$．x_i は $t = x_j$ に出現しないので，1. が成立する．

- $t = \mathsf{fun}\ y^{B_0}.t_0$．$\vec{x}^{\vec{A}}, y^{B_0} \vdash t_0 : B_1$．帰納法の仮定と場合分けにより，
  1. t_0 中の x_i のいずれの出現も除去される．1. が成立する．
  2. A_i は $\vec{A}$ のいずれかの又は B_0 の真部分論理式である．2. が成立する．
  3. A_i は B の部分論理式である．A_i は $B = B_0 \multimap B_1$ の部分論理式なので，3. が成立する．
- $t = x_j\ t_1$．$\vec{x}^{\vec{A}} \setminus \{x_j^{A_j}\} \vdash t_1 : A_{j,0}$．帰納法の仮定と場合分けにより，
  1. t_1 中の x_i のいずれの出現も除去される．1. が成立する．
  2. A_i はいずれかの $k \neq j$ について A_k の真部分論理式である．2. が成立する．
  3. A_i は $A_{j,0}$ の部分論理式である．

簡約前：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a^{A\multimap B}\vdash a:A\multimap B}\quad \dfrac{d_0}{\Gamma,\vec{x}^{\vec{C}}\vdash t:A}}{\Gamma,a^{A\multimap B},\vec{x}^{\vec{C}}\vdash a\,t:B}}{\Gamma,a^{A\multimap B}\vdash \mathcal{A}[a\,t]:E}\,i_0 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a^{B\multimap A}\vdash a:B\multimap A}\quad\dfrac{d_1}{\Gamma,\vec{y}^{\vec{D}}\vdash u:B}}{\Gamma,a^{B\multimap A},\vec{y}^{\vec{D}}\vdash a\,u:A}}{\Gamma,a^{B\multimap A}\vdash\mathcal{B}[a\,u]:E}\,i_1}{\Gamma\vdash\mathcal{A}[a\,t]\parallel_a\mathcal{B}[a\,u]:E}$$

簡約後：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{d_0}{\Gamma,a^{A\multimap B}\vdash\mathcal{A}[a\,t]:E}}{\Gamma,a^{A\multimap B},b^{\otimes\vec{D}\multimap\otimes\vec{C}}\vdash\mathcal{A}[a\,t]:E}\,\mathrm{W}\qquad \dfrac{\dfrac{d_0\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{b^{\otimes\vec{D}\multimap\otimes\vec{C}}\vdash b:\otimes\vec{D}\multimap\otimes\vec{C}}}{a^{B\multimap A},b^{\otimes\vec{D}\multimap\otimes\vec{C}}\vdash b:\otimes\vec{D}\multimap\otimes\vec{C}}\,\mathrm{W}\quad \dfrac{}{\vec{y}^{\vec{D}}\vdash\langle\!\langle\vec{y}\rangle\!\rangle:\otimes\vec{D}}}{a^{B\multimap A},b^{\otimes\vec{D}\multimap\otimes\vec{C}},\vec{y}^{\vec{D}}\vdash b\,\langle\!\langle\vec{y}\rangle\!\rangle:\otimes\vec{C}}}{\Gamma,a^{B\multimap A},b^{\otimes\vec{D}\multimap\otimes\vec{C}},\vec{y}^{\vec{D}}\vdash\mathsf{case}\,b\,\langle\!\langle\vec{y}\rangle\!\rangle\,\mathsf{of}\,\langle\!\langle\vec{x}\rangle\!\rangle.t:A}\,\mathrm{Sub}^*}{\Gamma,a^{B\multimap A},b^{\otimes\vec{D}\multimap\otimes\vec{C}}\vdash\mathcal{B}[\mathsf{case}\,b\,\langle\!\langle\vec{y}\rangle\!\rangle\,\mathsf{of}\,\langle\!\langle\vec{x}\rangle\!\rangle.t]:E}\,i_0}{\Gamma,b^{\otimes\vec{D}\multimap\otimes\vec{C}}\vdash\mathcal{A}[a\,t]\parallel_a\mathcal{B}[\mathsf{case}\,b\,\langle\!\langle\vec{y}\rangle\!\rangle\,\mathsf{of}\,\langle\!\langle\vec{x}\rangle\!\rangle.t]:E}$$
$$\vdots\,0$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{d_1\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{b^{\otimes\vec{C}\multimap\otimes\vec{D}}\vdash b:\otimes\vec{C}\multimap\otimes\vec{D}}}{a^{A\multimap B},b^{\otimes\vec{C}\multimap\otimes\vec{D}}\vdash b:\otimes\vec{C}\multimap\otimes\vec{D}}\,\mathrm{W}\quad \dfrac{}{\vec{x}^{\vec{C}}\vdash\langle\!\langle\vec{x}\rangle\!\rangle:\otimes\vec{C}}}{a^{A\multimap B},b^{\otimes\vec{C}\multimap\otimes\vec{D}},\vec{x}^{\vec{C}}\vdash b\,\langle\!\langle\vec{x}\rangle\!\rangle:\otimes\vec{D}}}{\Gamma,a^{A\multimap B},b^{\vec{C}\multimap\vec{D}},\vec{x}^{\vec{C}}\vdash\mathsf{case}\,b\,\langle\!\langle\vec{x}\rangle\!\rangle\,\mathsf{of}\,\langle\!\langle\vec{y}\rangle\!\rangle.u:B}\,\mathrm{Sub}^*}{\Gamma,a^{A\multimap B},b^{\otimes\vec{C}\multimap\otimes\vec{D}}\vdash\mathcal{A}[\mathsf{case}\,b\,\langle\!\langle\vec{x}\rangle\!\rangle\,\mathsf{of}\,\langle\!\langle\vec{y}\rangle\!\rangle.u]:E}\,i_1\qquad \dfrac{\dfrac{d_1}{\Gamma,a^{B\multimap A}\vdash\mathcal{B}[a\,u]:E}}{\Gamma,a^{B\multimap A},b^{\otimes\vec{C}\multimap\otimes\vec{D}}\vdash\mathcal{B}[a\,u]:E}\,\mathrm{W}}{\Gamma,b^{\otimes\vec{C}\multimap\otimes\vec{D}}\vdash\mathcal{A}[\mathsf{case}\,b\,\langle\!\langle\vec{x}\rangle\!\rangle\,\mathsf{of}\,\langle\!\langle\vec{y}\rangle\!\rangle.u]\parallel_a\mathcal{B}[a\,u]:E}$$
$$\vdots\,1$$

$$\dfrac{\vdots\,0\quad\vdots\,1}{\Gamma\vdash\mathcal{A}[a\,t]\parallel_a\mathcal{B}[\mathsf{case}\,b\,\langle\!\langle\vec{y}\rangle\!\rangle\,\mathsf{of}\,\langle\!\langle\vec{x}\rangle\!\rangle.t]\parallel_b(\mathcal{A}[\mathsf{case}\,b\,\langle\!\langle\vec{x}\rangle\!\rangle\,\mathsf{of}\,\langle\!\langle\vec{y}\rangle\!\rangle.u]\parallel_a\mathcal{B}[a\,u]):E}$$

図 4　cross 簡約の主部簡約

  - $j=i$．いずれの論理式もその部分論理式の真部分論理式ではありえない．
  - $k\neq i$．A_i は $A_j=A_{j,0}\multimap B$ の部分論理式なので，2. が成立する．
- $t=\langle\!\langle\rangle\!\rangle$．$x_i$ は t 中に出現しないので，1. が成立する．
- $t=\mathsf{case}\ x_j\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.t_1$．$\vec{x}^{\vec{A}}\setminus\{x_j^{A_j}\}\vdash t_1:B$．帰納法の仮定と場合分けにより，
  1. t_1 中の x_i のいずれの出現も除去される．1. が成立する．
  2. A_i はいずれかの $k\neq j$ について A_k の真部分論理式である．2. が成立する．
  3. A_i は B の部分論理式である．3. が成立している．
- $t=\langle\!\langle t_0,t_1\rangle\!\rangle$．$\vec{x}^{\vec{A}}=\Gamma_0\uplus\Gamma_1$ なるいずれかの Γ_0,Γ_1 について $\Gamma_0\vdash t_0:B_0$ かつ $\Gamma_1\vdash t_0:B_0$．帰納法の仮定と場合分けにより，
  1. t_0,t_1 中の x_i のいずれの出現も除去される．

1. が成立する．

2. A_i は $\vec{A}$ のいずれかの真部分論理式である．2. が成立している．

3. A_i は B_0 又は B_1 の部分論理式である．A_i は $B = B_0 \otimes B_1$ の部分論理式なので，3. が成立する．

- $t = \mathsf{case}\ x_j\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle y_0^{A_{j,0}}, y_1^{A_{j,1}} \rangle\!\rangle.t_1$．$\vec{x}^{\vec{A}} \setminus \{x_j^{A_j}\}, y_0^{A_{j,0}}, y_1^{A_{j,1}} \vdash t_1 : B$．帰納法の仮定と場合分けにより，
  1. t_1 中の x_i のいずれの出現も除去される．1. が成立する．
  2. A_i はいずれかの $k \neq j$ について A_k の，またはいずれかの k について $A_{k,j}$ の真部分論理式である．$A_{k,j}$ の真部分論理式は A_k の真部分論理式なので，2. が成立する．
  3. A_i は B の部分論理式である．3. が成立している．

■

命題 3 既約項の並列性． t が不可約だとする．t は並列的である．

証明．t 上の帰納法により，

- t が次のいずれかである：$x, \langle\!\langle\rangle\!\rangle$．自明である．
- t が次のいずれかである：$\mathsf{fun}\ x.t_0$，$t_0\ t_1$，$\mathsf{case}\ t_0\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.t_1, \langle\!\langle t_0,t_1 \rangle\!\rangle, \mathsf{case}\ t_0\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle x_0,x_1 \rangle\!\rangle.t_1$．場合分けにより，
  - いずれかの i について t_i は通信的である．t が p-可約であり，仮定と矛盾する．
  - いずれの i についても t_i は通信的でない．示された．
- $t = t_0 \parallel_a t_1$．帰納法の仮定により，t_0, t_1 は並列的である．示された．

■

$t = t_0 \parallel_a t_1$ において，$\parallel_a$ に束縛される t_0, t_1 中の a の出現を**通信出現**と言う．

定理 3 部分論理式性． 不可約な項 t について $\vec{x}^{\vec{A}} \vdash t : B$ とする．

1. t 中のいずれの通信出現 $a^{C_0 \multimap C_1}$ についても C_0, C_1 の素因式は $\vec{A}$ のいずれかの又は B の真部分論理式.
2. t のいずれの通信出現でない部分項 u についても，$\vec{y}^{\vec{C}} \vdash u : D$ であり，$\vec{C}, D$ のいずれも $\vec{A}$ のいずれかの又は B の部分論理式か部分論理式の乗法的連言である．

証明．本証明で，いずれの $t, \vec{A}$ についても次の命題を $p_2(t, \vec{A})$ と書く：t のいずれの通信出現でない部分項 u についても，$\vec{y}^{\vec{C}} \vdash u : D$ であり，$\vec{C}, D$ のいずれも $\vec{A}$ のいずれかの部分論理式か部分論理式の乗法的連言である．2. は $p_2(t, \vec{A} \uplus \{B\})$ と言える．

t 上の帰納法による．$t = t_0 \parallel_a t_1$ を除くいずれの場合でも 1. は命題 2 より明らかなので，2. についてのみ示す．

- $t = x_i$．$\vec{x}^{\vec{A}} \vdash x_i : A_i$．自明である．
- $t = \mathsf{fun}\ y^{B_0}.t_0$．$\vec{x}^{\vec{A}}, y^{B_0} \vdash t_0 : B_1$．帰納法の仮定より，$p_2(t_0, \vec{A} \uplus \{B_0, B_1\})$．$B = B_0 \multimap B_1$ なので，示された．
- $t = x_i\ t$．$\vec{x}^{\vec{A}} \setminus \{x_i^{A_i}\} \vdash t_1 : A_{i,0}$ 帰納法の仮定より，$p_2(t_0, \vec{A} \setminus \{A_i\} \uplus \{A_{i,0}\})$．$A_i = A_{i,0} \multimap B$ なので，示された．
- $t = \langle\!\langle\rangle\!\rangle$．$B = \mathbf{1}$ は 0 個の論理式の連言である．
- $t = \mathsf{case}\ x_i\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle\rangle\!\rangle.t_1$．$\vec{x}^{\vec{A}} \setminus \{x_i^{A_i}\} \vdash t_1 : B$．帰納法の仮定より，$p_2(t_1, \vec{A} \setminus \{A_i\} \uplus \{B\})$．よって示された．
- $t = \langle\!\langle t_0, t_1 \rangle\!\rangle$．$\vec{x}^{\vec{A}} = \vec{x}_0^{\vec{A}_0} \uplus \vec{x}_1^{\vec{A}_1}$ なる $\vec{x}_0^{\vec{A}_0}, \vec{x}_1^{\vec{A}_1}$ について $\vec{x}_0^{\vec{A}_0} \vdash t_0 : B_0$ かつ $\vec{x}_1^{\vec{A}_1} \vdash t_1 : B_1$．帰納法の仮定より $p_2(t_0, \vec{A}_0 \uplus \{B_0\})$ かつ $p_2(t_1, \vec{A}_1 \uplus \{B_1\})$．$B = B_0 \otimes B_1$ なので示された．
- $t = \mathsf{case}\ x_i\ \mathsf{of}\ \langle\!\langle y_0^{A_{i,0}}, y_1^{A_{i,1}} \rangle\!\rangle.t_1$．$\vec{x}^{\vec{A}}, y_0^{A_{i,0}}, y_1^{A_{i,1}} \vdash t_1 : B$．帰納法の仮定より $p_2(t, \vec{A} \uplus \{A_{i,0}, A_{i,1}, B\})$．$A_i = A_{i,0} \otimes A_{i,1}$ より，示された．
- $t = t_0 \parallel_a^{C_0,C_1} t_1$．$cc = \mathrm{comComp}(t)$ とする．$cc = 0$ を示す．$cc > 0$ と仮定する．命題 3 より，t は並列的である．t が通信的ならば p-可約となり矛盾するので，t は通信的でない．$cc > 0$ なので，$C_0 \multimap C_1, C_1 \multimap C_0$ はいずれの i についても A_i の部分論理式でも B のそれでもない．命題 2 より，いずれの i についても $a^{C_i \multimap C_{1-i}}$ は $a\ u_i$ の形で出現する．よって，最右の $a^{C_i \multimap C_{1-i}}$ の出現について $t_i = \mathcal{A}_i[a\ u_i]$ と書ける．t は c-可約であり，仮定に矛盾する．よって $cc = 0$．C_0, C_1 の素因式は $\vec{A}$

のいずれかの又は B の真部分論理式である．

いずれの i についても $\vec{x}^{\vec{A}}, a^{C_i \multimap C_{1-i}} \vdash t_i : B$．帰納法の仮定と場合分けにより，

1. いずれの i についても，t_i 中のいずれの通信出現 $b^{D_0 \multimap D_1}$ についても D_0, D_1 の素因式は $\vec{A}$ のいずれかの又は $B, C_0 \multimap C_1, C_1 \multimap C_0$ のいずれかの真部分論理式である．よって示された．
2. いずれの i についても $p_2(t_i, \vec{A} \uplus \{C_i \multimap C_{1-i}\})$．よって示された．

■

5 おわりに

既知の Gödel 論理の自然演繹 NG 及びλ計算 $\lambda\!\!\lambda_G$ に基づき Monoidal t-norm 論理の自然演繹 $\mathcal{N}_{MT}$ 及びそれに証明項を付けるλ計算 λ_{MT} を導入した．このλ計算は resource-sensitivity と並列計算能力を持つ．またその部分論理式性を示した．

残る課題は（弱）正規化性の証明だがここに難点が有る．Ascieri らは $\lambda\!\!\lambda_G$ の弱正規化性の証明に次の命題を用いた．

Prop. V.1 [2] **不可約非通信的項の束縛変数の性質．** $\lambda\!\!\lambda_G$ において、不可約で非通信的な項 t について $\vec{x}^{\vec{A}} \vdash t : B$ とする．y^C が t に束縛出現するとする．次のいずれかが成立する．

1. C は B の素因式の真部分論理式である．
2. C は $\vec{A}$ のいずれかの強部分論理式である．

ところが λ_{MT} でこれを t 上の帰納法で証明しようとすると $t = \texttt{case}\ x_i\ \texttt{of}\ \langle\!\langle z_0^{A_{i,0}}, z_1^{A_{i,1}} \rangle\!\rangle.t_1$ の場合で成立しない．C は $A_i = A_{i,0} \otimes A_{i,1}$ の真部分論理式 $A_{i,j}$ の部分論理式だが A_i の強部分論理式とは言えず，2. は成立しない．$\otimes$-E の構造上 B の情報が増えないので 1. も成立しない．

従って，本稿で示した部分論理式性の様に Aschieri ら [2] の結果を素朴に改変するだけでは証明できないが，これをどの様に解決するかは今後の課題である．

また，線型型を持つ π 計算[8] などの似た性質を持つ既存体系との関連も調査を要する．

参考文献

[1] Aschieri, F.: On Natural Deduction for Herbrand Constructive Logics I: Curry-Howard Correspondence for Dummett's Logic LC, *Logical Methods in Computer Science*, Vol. 12, No. 3(2016).

[2] Aschieri, F., Ciabattoni, A., and Genco, F. A.: Gödel logic: From natural deduction to parallel computation, *Logic in Computer Science (LICS), 2017 32nd Annual ACM/IEEE Symposium on*, IEEE, 2017, pp. 1–12.

[3] Avron, A.: Hypersequents, logical consequence and intermediate logics for concurrency, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, Vol. 4, No. 3-4(1991), pp. 225–248.

[4] Bierman, G. M.: On intuitionistic linear logic, Technical report, Citeseer, 1994.

[5] Esteva, F. and Godo, L.: Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-norms, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 124, No. 3(2001), pp. 271–288.

[6] Hirai, Y.: A lambda calculus for Gödel–Dummett logic capturing waitfreedom, *International Symposium on Functional and Logic Programming*, Springer, 2012, pp. 151–165.

[7] Howard, W. A.: The formulae-as-types notion of construction, *To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, (1980), pp. 479–490.

[8] Kobayashi, N., Pierce, B. C., and Turner, D. N.: Linearity and the Pi-calculus, *ACM Trans. Program. Lang. Syst.*, Vol. 21, No. 5(1999), pp. 914–947.

[9] Metcalfe, G., Olivetti, N., and Gabbay, D. M.: *Proof Theory for Fuzzy Logics*, Springer Science & Business Media, 2008.

[10] Ono, H.: Substructural logics and residuated lattices — an introduction, *Trends in logic*, Springer, 2003, pp. 193–228.

[11] Pierce, B. C.: *Advanced Topics in Types and Programming Languages*, The MIT Press, 2004.