日本ソフトウェア科学会第 34 回大会 (2017 年度) 講演論文集

正則項上の可換な単一化について

岩見 宗弘

有限項上の可換な単一化 (C-単一化) アルゴリズムは推論規則を用いて与えられ，その停止性，健全性と完全性が示されている．一方，正則項上の C-単一化アルゴリズムは推論規則を用いて与えられていない．また，その性質も示されていない．

本論文では，正則項上における C-単一化の基礎理論を項書換えシステムの枠組みで確立することを目標とする．最初に，正則項上の C-単一化を推論規則を用いて定式化する．次に，その停止性，健全性と完全性を示す．さらに，C-単一化問題 S が C-単一化可能であるならば，S の C-単一化子の完備集合が得られることを示す．

1 はじめに

単一化 (unification) は論理型言語における基本演算であり，関数型言語の型推論，項書換えシステムの合流性の証明や完備化手続き等に広く応用されている [14].

有限項上の (一階の構文的) 単一化は，推論規則を用いて定式化され，その停止性，健全性と完全性が項書換えシステムの枠組みにおいて示されている [1] [2] [6] [10] [11].

また，有限項上の単一化を等式集合を用いて拡張した等式付単一化 (equational unification) に関する研究が行われている [1] [2] [6] [10]．可換な単一化 (C-単一化と略す) は，関数記号の可換性を定義する等式集合に基づき，等式付単一化において最も基本的な体系である．有限項上の C-単一化は推論規則を用いて与えられ，その停止性，健全性と完全性が示されている [1] [2].

一方，有限項だけを対象とするのではなく，比較的扱いやすい無限項である正則項上の (構文的) 単一化に関する研究も数多く行われている [8] [5] [3] [4] [13] [12]. 現在では，多くの Prolog 処理系において正則項上の単一化が実現されている．最近，Jaffar [9] による効率的な正則項上の単一化アルゴリズムが，無限項書換えシステムの強頭部正規化可能性および一般生成性に対する反証手続きに応用されている [16]．しかしながら，正則項上の単一化の理論的な研究はあまり進んでいるとはいえない．そこで我々は先行研究 ([14] [15]) において，正則項上の (構文的) 単一化を推論規則を用いて再定式化し，その停止性，健全性と完全性を示している．

また，正則項上の C-単一化は推論規則を用いて与えられていない．さらに，その性質も示されていない．

本論文では，正則項上における C-単一化の基礎理論を項書換えシステムの枠組みで確立することを目標とする．最初に，正則項上の C-単一化を推論規則を用いて定式化する．次に，その停止性，健全性と完全性を示す．さらに，C-単一化問題 S が C-単一化可能であるならば，S の C-単一化子の完備集合が得られることを示す．

---

* On the Commutative Unification of Rational Terms

Munehiro Iwami, 島根大学総合理工学部数理・情報システム学科, Dept. of Mathematics and Computer Science, Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University.

2　準備

本節では，本論文で使用する定義や記法を与える．本節の内容は主に文献[14][16] に基づいている．詳細は文献[1][2][5] などを参考にして頂きたい．

集合 A 上の 2 項関係 $>$ が非反射的かつ推移的であるとき，$>$ を A 上の**半順序**という．集合 A 上の半順序 $>$ が**整礎**であるとは，無限減少列 $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$ が存在しないときをいう．

関数記号の集合を $\mathcal{F}$, **変数**の可算無限集合を $\mathcal{V}$ とし，$\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ とする．0 引数の関数記号を**定数**とよび，n 引数の関数記号の集合を $\mathcal{F}_n$ と表す．$\mathbb{N}_+$ を正整数集合とし，正整数の有限列の集合を ${\mathbb{N}_+}^*$ と表す．有限列 $p, q \in {\mathbb{N}_+}^*$ の連結を $p.q$ と表す．部分関数 $t : {\mathbb{N}_+}^* \to \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ に対して，以下の条件を満たすものを $\mathcal{F}, \mathcal{V}$ 上の**項**とよぶ: (1) $t(\epsilon) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$; (2) 任意の $p \in {\mathbb{N}_+}^*$ に対して，$t(p.i) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V} \Longleftrightarrow t(p) \in \mathcal{F}_n$ かつ $1 \le i \le n$. ここで，ϵ は空列を表す．$\mathcal{F}, \mathcal{V}$ 上の項の集合を $T_{\mathit{inf}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と表す．

項 $t \in T_{\mathit{inf}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ の定義域 $\mathsf{Pos}(t) = \{p \in {\mathbb{N}_+}^* \mid t(p) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V}\}$ の要素を t における**位置**とよぶ．$p \notin \mathsf{Pos}(t)$ なる $p \in {\mathbb{N}_+}^*$ に対して，$t(p) = \bot$ と定義する．ただし，$\bot$ は $\bot \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ なる定数とする．このとき，$s = t \Longleftrightarrow \forall p \in \mathsf{Pos}(s).\ s(p) = t(p)$ が成り立つ．項 t に出現する変数集合を $\mathcal{V}(t)$ と表す．位置集合が有限集合であるとき，項 t を**有限**であるという．有限項の集合を $T_{\mathit{fin}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と表す．有限項 t の**サイズ**を位置集合 $\mathsf{Pos}(t)$ の要素の個数とし，$|t|$ と表す．有限項と区別するときには，項を**無限項**とよぶ．位置 $p \in \mathsf{Pos}(t)$ における項 t の**部分項**を $t|_p(q) = t(p.q)$ なる項 $t|_p$ と定義する．関数記号 $f \in \mathcal{F}_n$ と項 $t_1, \dots, t_n \in T_{\mathit{inf}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に対して，次の条件により定義される項 t を $f(t_1, \dots, t_n)$ と表す: (1) $t(\epsilon) = f$; (2) $t(i.p) = t_i(p)$ $(1 \le i \le n, p \in {\mathbb{N}_+}^*)$. 位置集合上の**接頭辞順序**を $p \preceq q \Leftrightarrow \exists r \in {\mathbb{N}_+}^*.\ q = p.r$ により定義する．ある位置 q および正整数 $i < j$ が存在して，$q.i \preceq p_1, q.j \preceq p_2$ を満たすとき，p_1 は p_2 の**左**に位置するという．

写像 $\sigma : \mathcal{V} \to T_{\mathit{inf}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を**代入**とよぶ．代入 σ を項 $t \in T_{\mathit{inf}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に適用した結果 $\sigma(t)$ を次のように定義する: (1) $p = p_0.p_1$ かつ $t(p_0) \in \mathcal{V}$ を満たす $p_0, p_1 \in {\mathbb{N}_+}^*$ が存在するとき，$\sigma(t)(p) = \sigma(t(p_0))(p_1)$; (2) それ以外のとき，$\sigma(t)(p) = t(p)$. $\sigma(t)$ は t に出現する変数 $x \in \mathcal{V}$ を $\sigma(x)$ により置き換えたときに得られる項を表す．代入 σ の定義域 $\{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \neq x\}$ を $\mathsf{dom}(\sigma)$ と表す．$\mathsf{dom}(\sigma) = \{x_1, \dots, x_n\}$ かつ $\sigma(x_i) = t_i$ である代入を $\{x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n\}$ とも表す．$\mathsf{dom}(\sigma)$ が有限かつ任意の $x \in \mathsf{dom}(\sigma)$ に対して $\sigma(x) \in T_{\mathit{fin}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を満たすとき，σ を**有限代入**とよぶ．代入の合成を $\circ$ により表す．すなわち，任意の変数 $x \in \mathcal{V}$ に対して，$\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.

$\Box \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ なる定数 $\Box$ を**ホール**とよぶ．$C \in T_{\mathit{inf}}(\mathcal{F} \cup \{\Box\}, \mathcal{V})$ に対して，$\{p \in {\mathbb{N}_+}^* \mid C(p) = \Box\}$ が有限集合となるものを**文脈**とよぶ．文脈 C が $\{p \in {\mathbb{N}_+}^* \mid C(p) = \Box\} = \{p_1, \dots, p_n\}$ かつ任意の $i < j$ に対して p_i が p_j より左に位置するとき，文脈 C を $C[, \dots,]_{p_1, \dots, p_n}$ と表す．文脈 $C[, \dots,]_{p_1, \dots, p_n}$ と項 $t_1, \dots, t_n \in T_{\mathit{inf}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に対して，項 $t = C[t_1, \dots, t_n]_{p_1, \dots, p_n}$ を次のように定義する: $\exists i, q.\ p = p_i.q$ のとき，$t(p) = t_i(q)$; それ以外のとき，$t(p) = C(p)$. すなわち，$C[t_1, \dots, t_n]_{p_1, \dots, p_n}$ は文脈 C に出現するホールを左から順に $t_1, \dots, t_n$ に置き換えて得られる項を表す．また，ホールの出現が 1 つだけの文脈を $C[\,]_p$ と表す．

等式を $s \approx t$ と表す．ここでは $s, t \in T_{\mathit{inf}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ とする．等式 $s \approx t$ の左辺を s，右辺を t とし，等式の左辺と右辺は区別する．代入 σ を等式集合 $\{x \approx \sigma(x) \mid x \in \mathsf{dom}(\sigma)\}$ と同一視して考える．等式集合 E に出現する変数の集合を次のように定義する: $\mathcal{V}(E) = \bigcup_{(s \approx t) \in E} (\mathcal{V}(s) \cup \mathcal{V}(t))$.

等式集合 E の **(構文的) 単一化子**とは，任意の等式 $s \approx t \in E$ に対して，$\sigma(s) = \sigma(t)$ となる代入 σ をいう．等式集合 E の単一化子の集合を $\mathsf{Unif}_{\mathit{inf}}(E)$ と表す．$\mathsf{Unif}_{\mathit{inf}}(E) \neq \emptyset$ のとき，等式集合 E は**単一化可能**であるという．単一化可能性を判定する問題を，**単一化問題**という．代入上の擬順序 $\lesssim$ を $\theta \lesssim \eta \Longleftrightarrow$ ある代入 ρ が存在して $\eta = \rho \circ \theta$ により定めるとき，単一化子のうち擬順序 $\lesssim$ に関して極小となる単一化子を**最汎単一化子**とよぶ．等式集合 E が単一化可能

であるときには，最汎単一化子が存在し，同値関係 $\gtrsim \cap \lesssim$ に関して一意に定まる[5]. 等式集合 E と代入 σ に対して，$\sigma(E) = \{\sigma(s) \approx \sigma(t) \mid s \approx t \in E\}$ と定義する．ここで，等式集合 E が**有限項上で単一化可能である**とは，有限代入であるような $\mathsf{Unif}_{inf}(E)$ の要素があるときをいう. 特に区別する場合には，単一化可能であることを**無限項上で単一化可能である**ともいう.

3 正則項上の単一化と再帰式表現

本節では正則項上の単一化と再帰式表現の定義やそれらの基本的性質について述べる．本節の内容は主に文献[16] に基づいている．

定義 1 *(正則項[5])* 項 t が**正則** *(regular または rational)* であるとは，t の部分項集合が有限集合であるときをいう.

例 2 *([14])* 位置 p^n を $p^0 = \epsilon$; $p^{i+1} = p^i.p$ により定義する．ここで，$\mathsf{b} \in \mathcal{F}_0, \mathsf{g} \in \mathcal{F}_2$ とし，無限項 t を次のように定義する．$t(2^n.1) = \mathsf{b}$ $(n \geq 0)$ かつ $t(2^n) = \mathsf{g}$. このとき，$\mathsf{Pos}(t) = \{1, 21, 221, \ldots\} \cup \{\epsilon, 2, 22, \ldots\} = \{2^n.1 \mid n \geq 0\} \cup \{2^n \mid n \geq 0\}$. また，$t|_{2^n.1} = \mathsf{b}$ かつ $t|_{2^n} = t$ より，無限項 t の部分項集合 $\{t, \mathsf{b}\}$ は有限である．よって，t は正則項である．直感的に，t は $\mathsf{g}(\mathsf{b}, \mathsf{g}(\mathsf{b}, \mathsf{g}(\mathsf{b}, \ldots)))$ なる無限項を表す.

有限項は明らかに正則である. 代入 θ が次の 2 つの条件を満たすとき**正則代入**とよぶ: $\mathsf{dom}(\theta)$ が有限集合であり，かつ，任意の変数 $x \in \mathsf{dom}(\theta)$ に対して $\theta(x)$ が正則項である．正則項は正則代入の適用に関して閉じており，代入の正則性は代入合成 $\circ$ により保存される.

命題 3 *(正則項の単一化[5])* 正則項の無限項上での単一化問題は決定可能であり，単一化可能であるときに最汎単一化子を求めるアルゴリズムが存在する. また，最汎単一化子は正則代入となる.

定義 4 *(再帰式表現[16])* 有限代入 $\{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\}$ が以下の条件を満たすとき，これを**再帰式表現**とよび，$[x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ と表す:

$$\begin{aligned}&\neg\exists\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}.\\ &\qquad (\forall 1 \leq j < k.\ t_{i_j} = x_{i_{j+1}}) \wedge t_{i_k} = x_{i_1}\end{aligned} \tag{1}$$

定義 5 *(再帰式表現の解[16])* $\theta = [x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ を再帰式表現とし，任意の $1 \leq i \leq n$ に対して，$t_i = C_i[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k_i}}]$ とする． ただし，文脈 C_i には変数が出現しないとする． このとき，項 $\theta^\star(x_1), \ldots, \theta^\star(x_n)$ を以下のように相互再帰的に定義する． $\theta^\star(x_i)(p) = \begin{cases} C_i(p) & (p \in \mathsf{Pos}(C_i) \wedge C_i|_p \neq \square) \\ \theta^\star(x_{i_j})(q) & (\exists j, q.\ p = p_{i_j}.q) \end{cases}$
項 $\theta^\star(x_1), \ldots, \theta^\star(x_n)$ を再帰式表現の**解**とよぶ.

再帰式表現の条件 (1) より，$\theta^\star(x_i)$ は定義として成立している．また，$C_i|_{p_{i_j}} = \square$ より項 $\theta^\star(x_1), \ldots, \theta^\star(x_n)$ は一意に定まる. さらに，定義より明らかに，$\theta^\star$ は $\mathsf{dom}(\theta^\star) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ である正則代入である.

また，任意の再帰式表現 θ に対して，$\theta^\star = \tau^\star$ となる再帰式表現 τ で次の条件を満たすものが存在する: $\forall x \in \mathsf{dom}(\tau).\ \tau(x) \notin \mathsf{dom}(\tau)$.

命題 6 *(正則項と再帰式表現[4][5]) 1.* 再帰式表現の解は正則項である. *2.* 任意の正則項はある再帰式表現の解となる.

すなわち，任意の正則項は，再帰式表現 θ を用いて，$\theta^\star(x)$ の形で表すことができる. これを**正則項の再帰式表現**とよぶ. ここで，正則項の再帰式表現は必ずしも一通りとは限らない.

以下では, 有限項の等式の有限集合のみを考える.

次の補題は，再帰式表現 θ の表す正則代入 $\theta^\star$ は再帰式表現に対応する等式集合の最汎単一化子となっていることを示す.

補題 7 *(再帰式表現の最汎単一化子[16])* $\theta = [x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ を再帰式表現とする. このとき，正則代入 $\theta^\star$ は再帰式表現 θ に対応する等式集合 $\{x_1 \approx t_1, \ldots, x_n \approx t_n\}$ の最汎単一化子である.

次に，補題 7 を用いて再帰式表現の表す正則代入はべき等性を満たすことが示せる.

補題 8 *([14][15])* θ が再帰式表現であるとき，$\theta^\star = \theta^\star \circ \theta^\star$.

4 正則項上の可換な単一化の基本的定義

本節では，正則項上の可換な単一化の基本的な定義と性質について述べる．本節の内容は主に文献[1][2] に基づいている.

次の定義は文献[1] [2] の有限項に関するものを正則項に拡張したものである．

定義 9 *(正則項上の等式理論) E を等式集合とする．このとき，***等式理論** $\approx_E$ *は次の条件を満たす $T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ 上の最小の同値関係である: (i) 任意の文脈 C に対して $s \approx_E t$ ならば $C[s] \approx_E C[t]$, (ii) 任意の正則代入 σ に対して $s \approx_E t$ ならば $\sigma(s) \approx_E \sigma(t)$, (iii) $\approx_E$ は E を含む．$s \approx_E t$ のとき, 項 s と t は E を***法として等しい***とよぶ．以下では，$s \approx_E t$ を E を***法とする等式***または単に***等式***とよぶ．ここで，等式集合 E に属する等式とは意味が異なることに注意する．また，正則項は正則代入と文脈に対して，それぞれ閉じていることに注意する [5].*

例 10 $\mathsf{g} \in \mathcal{F}_2$ とする．等式集合 $C = \{\mathsf{g}(x,y) \approx \mathsf{g}(y,x)\}$ は g が可換であることを表す．以下では，正則項 $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\cdots))$, $\mathsf{h}(\mathsf{h}(\cdots))$ $\mathsf{p}(\mathsf{p}(\cdots))$ をそれぞれ $\mathsf{f}^\omega, \mathsf{h}^\omega, \mathsf{p}^\omega$ と略記する．このとき，$\mathsf{g}(\mathsf{f}^\omega, \mathsf{g}(\mathsf{h}^\omega, \mathsf{p}^\omega)) \approx_C \mathsf{g}(\mathsf{f}^\omega, \mathsf{g}(\mathsf{p}^\omega, \mathsf{h}^\omega)) \approx_C \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{p}^\omega, \mathsf{h}^\omega), \mathsf{f}^\omega)$ より，$\mathsf{g}(\mathsf{f}^\omega, \mathsf{g}(\mathsf{h}^\omega, \mathsf{p}^\omega)) \approx_C \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{p}^\omega, \mathsf{h}^\omega), \mathsf{f}^\omega)$.

定義 11 *(可換記号と自由記号) ([1]) $g \in \mathcal{F}_2$ の***可換性***は等式集合 $C_g = \{g(x,y) \approx g(y,x)\}$ により定義する．可換な関数記号を***可換記号***とよび, それ以外の関数記号を***自由記号***とよぶ．以下では, $\mathcal{F}^C$ を項数 2 の可換記号の有限集合とし, $\mathcal{F}^F$ を自由記号からなる有限集合とする．このとき, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^C \uplus \mathcal{F}^F$ とする．等式集合 $C = \bigcup_{g \in \mathcal{F}^C} C_g$ は $\mathcal{F}^C$ に属する記号の可換性を表す.*

次の補題は $\approx_C$ に関するいくつかの性質を述べている．これは，文献[1] の有限項上の補題を正則項上に拡張したものである．

補題 12 *$s,t \in T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ とする．*

1. $s \approx_C t$ ならば,$|s| = |t|$, $\mathcal{V}(s) = \mathcal{V}(t)$, かつ $s(\epsilon) = t(\epsilon)$.

2. 任意の $n \geq 0$ かつ $f \in \mathcal{F}^F_n$ に対して, $f(s_1,\ldots,s_n) \approx_C f(t_1,\ldots,t_n)$ と $s_i \approx_C t_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ は同値である．

3. 任意の $g \in \mathcal{F}^C$ に対して, $g(s_1,s_2) \approx_C g(t_1,t_2)$ と $s_1 \approx_C t_1 \wedge s_2 \approx_C t_2$ または $s_1 \approx_C t_2 \wedge s_2 \approx_C t_1$ は同値である．

(証明) 文献[1] の s,t が有限項の場合と同様に示すことができる． □

以下のいつかの定義は，文献[1] の有限項に対するものを正則項上へ拡張したものである．

定義 13 *(C-単一化問題) 1. 正則項上の***C-単一化問題***とは等式の有限集合 $S = \{s_1 \approx_C t_1, \ldots, s_n \approx_C t_n\}$ である．このとき, $s_i, t_i \in T_{inf}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ $(i = 1,\ldots,n)$. C-単一化問題を***可換な単一化問題***ともよぶ.*

*2. S の***C-単一化子***とは下記の条件を満たす正則代入 σ である: $\sigma(s_i) \approx_C \sigma(t_i)$ $(i = 1,\ldots,n)$.*

*3. S のすべての C-単一化子の集合を $\mathsf{Unif}^C_{inf}(S)$ により表す．$\mathsf{Unif}^C_{inf}(S) \neq \emptyset$ のとき,S は***C-単一化可能***であるという.*

ここで，$C = \emptyset$ のときを考える．このとき，2 節で述べた単一化問題，単一化子，単一化可能性と定義 13 が一致する．

以下では文脈から明らかな場合には，再帰式表現 $\theta = [x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ をそれに対応する C-単一化問題 $\{x_1 \approx_C t_1, \ldots, x_n \approx_C t_n\}$ とみなす．

定義 14 *(C-インスタンス) 次の条件を満たすとき, 正則代入 σ が σ' より $\approx_C$ を法として***一般的である***という: すべての $x \in \mathcal{V}$ に対して, $\sigma'(x) \approx_C \delta(\sigma(x))$ を満たす正則代入 δ が存在する．このとき,$\sigma \lesssim_C \sigma'$ と表す．また, 正則代入 σ' を σ の***C-インスタンス***という.*

定義 15 *(C-単一化子の最小完備集合) S を C-単一化問題とする.*

*1. S の***C-単一化子の完備集合***は, 下記の条件を満たす正則代入集合 $\mathcal{D}$ である: (i) 任意の $\sigma \in \mathcal{D}$ は S の C-単一化子である，(ii) 任意の $\theta \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(S)$ に対して, $\sigma \lesssim_C \theta$ を満たす $\sigma \in \mathcal{D}$ が存在する.*

*2. S の***C-単一化子の最小完備集合***は, 下記の条件を満たす C-単一化子の完備集合 $\mathcal{D}$ である: 任意の $\sigma, \sigma' \in \mathcal{D}$ に対して, $\sigma \lesssim_C \sigma'$ ならば $\sigma = \sigma'$.*

*3. 代入 σ が S の***最汎 C-単一化子*** (mgu) であるとは, $\{\sigma\}$ が S の C-単一化子の最小完備集合であるときをいう.*

S の 1 つの C-単一化子 σ だけからなる集合 $\{\sigma\}$ は最小であるが，S の C-単一化子の完備集合であるとは限らない．すなわち，$\{\sigma\}$ が S の C-単一化子の最小完備集合であるとは限らない．

例 16 *(C-単一化子の最小完備集合)* $\mathsf{g} \in \mathcal{F}_2$ の可換性を表す等式集合を $C = \{\mathsf{g}(x,y) \approx \mathsf{g}(y,x)\}$ とする．このとき，$S = \{\mathsf{g}(x,y) \approx_C \mathsf{g}(\mathsf{h}(y),\mathsf{f}(x))\}$ とする．$\sigma_1 = \{x := \mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{f}(\cdots)))), y := \mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\cdots))))\}$, $\sigma_2 = \{x := \mathsf{f}(\mathsf{f}(\cdots)), y := \mathsf{h}(\mathsf{h}(\cdots))\}$ は S の C-単一化子である．また，任意の $\theta \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(S)$ に対して，$\tau \lesssim_C \theta$ を満たす $\tau \in \{\sigma_1, \sigma_2\}$ が存在する．よって,$\{\sigma_1, \sigma_2\}$ は S の C-単一化子の完備集合である．$\sigma_1 \not\lesssim_C \sigma_2$ かつ $\sigma_2 \not\lesssim_C \sigma_1$ より, この集合は最小である．

5 正則項上の可換な単一化アルゴリズム

本節では，正則項上の C-単一化アルゴリズムを推論規則を用いて与える．また，その停止性，健全性と完全性を示す．最後に，主定理として C-単一化問題 S が C-単一化可能であるならば，S の C-単一化子の完備集合が得られることを示す．

次の定義は文献[1] の有限項に関するものを正則項へ拡張したものである．

定義 17 *(拡張 C-単一化問題) 1.* **拡張 C-単一化問題** $\mathcal{M}$ は C-単一化問題の有限集合とする．

2. $\mathcal{M}$ の C-単一化子のすべての集合を下記の通りに定義する*:* $\mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}) = \bigcup_{S \in \mathcal{M}} \mathsf{Unif}^C_{inf}(S)$. すなわち,$\sigma$ が $\mathcal{M}$ の C-単一化子であることと,$\mathcal{M}$ のある元 S の C-単一化子であることは同値である．

定義 18 拡張 C-単一化問題 $\mathcal{M}$ が**再帰式表現**であるとは, 任意の $S \in \mathcal{M}$ が再帰式表現であるときをいう．

定義 18 から，拡張 C-単一化問題 $\mathcal{M}$ が空集合のとき，すなわち，$\mathcal{M} = \emptyset$ のとき，$\mathcal{M}$ は再帰式表現である．ただし，定義 17 より，$\mathcal{M} = \emptyset$ のとき，$\mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}) = \emptyset$ である．

補題 19 *(再帰式表現の最汎 C-単一化子)* $\theta = [x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ を再帰式表現とする. このとき，正則代入 $\theta^\star$ は再帰式表現 θ に対応する C-単一化問題 $\{x_1 \approx_C t_1, \ldots, x_n \approx_C t_n\}$ の最汎 C-単一化子である．

(証明) 文献[16] の補題と同様の手法により示すことができる． □

補題 20 S を C-単一化問題とする. S が再帰式表現であるならば，任意の $\sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(S)$ に対して，すべての $x \in \mathcal{V}$ について $\sigma(x) \approx_C \sigma \circ S^\star(x)$.

(証明) 文献[14] の補題と同様の手法により示すことができる． □

補題 21 S を C-単一化問題とし,$\mathcal{M}$ を拡張 C-単一化問題とする．

1. S が再帰式表現であるならば,$S^\star$ は S の最汎 C-単一化子である．

2. $\mathcal{M}$ が再帰式表現であるならば, $\{S^\star \mid S \in \mathcal{M}\}$ は $\mathcal{M}$ の C-単一化子の完備集合である．

(証明) 1. 補題 19 の証明と同様である．

2. 任意の $S \in \mathcal{M}$ に対して S は再帰式表現であるから, 1 より $S^\star$ は S の最汎 C-単一化子である．よって,$\{S^\star \mid S \in \mathcal{M}\}$ は $\mathcal{M}$ の C-単一化子の完備集合である． □

$\mathcal{M} = \emptyset$ のとき, 定義 18 から $\mathcal{M}$ は再帰式表現である．よって，$\{S^\star \mid S \in \mathcal{M}\} = \emptyset$ は $\mathcal{M}$ の C-単一化子の完備集合である．

次の正則項上の C-単一化に対する推論規則は文献[1][10] に倣っている．ここでは，出現検査を行う規則は考えない．$\mathsf{C-Decompose}$ 規則以外の推論規則は文献[14][15] とほぼ同様である．

以下では，解を持たない特別な C-単一化問題を $\perp$ で表す．

定義 22 *(正則項上の C-単一化に対する推論規則)* P を等式集合とする．以下では，記号 $\uplus$ は互いに素な集合の和をとる演算を表す．

1. Delete : $\{s \approx_C s\} \uplus P \rightsquigarrow P$,

2. $\mathsf{Decompose}$: $f \in \mathcal{F}^F_n$ のとき，$\{f(s_1, \ldots, s_n) \approx_C f(t_1, \ldots, t_n)\} \uplus P \rightsquigarrow \{s_1 \approx_C t_1, \ldots, s_n \approx_C t_n\} \cup P$,

3. $\mathsf{C-Decompose}$: $g \in \mathcal{F}^C$ のとき，
$$\begin{array}{c} \{g(s_1,s_2) \approx_C g(t_1,t_2)\} \uplus P \\ \rightsquigarrow \begin{array}{c} \{s_1 \approx_C t_1, s_2 \approx_C t_2\} \cup P \\ \{s_1 \approx_C t_2, s_2 \approx_C t_1\} \cup P \end{array}, \end{array}$$

4. Orient : $s \notin \mathcal{V}$ のとき，$\{s \approx_C x\} \uplus P \rightsquigarrow \{x \approx_C s\} \cup P$,

5. $\mathsf{Coalesce}$: $x \in \mathcal{V}(P)$ かつ $x \neq y$ のとき，$\{x \approx_C y\} \uplus P \rightsquigarrow \{x := y\}(P) \cup \{x \approx_C y\}$,

6. Merge : $s, t \notin \mathcal{V}$ かつ $|s| \leq |t|$ のとき, $\{x \approx_C s, x \approx_C t\} \uplus P \rightsquigarrow \{x \approx_C s, s \approx_C t\} \cup P$, *7.* Clash : $f, g \in \mathcal{F}$ かつ $f \neq g$ のとき，$\{f(s_1, \ldots, s_m) \approx_C g(t_1, \ldots, t_n)\} \uplus P \rightsquigarrow \bot$.

S を C-単一化問題とする. 以下では，定義 22 の推論規則を任意に 1 回適用した**推論**を $\rightsquigarrow$ により表す. $\rightsquigarrow$ の反射推移的閉包を $\rightsquigarrow^*$ で表す. S が $\rightsquigarrow$ に関する**正規形**であるとは，$S \rightsquigarrow T$ を満たす T が存在しないときをいう. $\rightsquigarrow$ に関する無限列 $S_0 \rightsquigarrow S_1 \rightsquigarrow S_2 \rightsquigarrow$ が存在しないとき，$\rightsquigarrow$ は**停止性**をもつという.

また，$\mathcal{M}$ を拡張 C-単一化問題とする. ここで，$\mathcal{M}$ に対して推論規則を適用するとは，$S \in \mathcal{M}$ に対して推論規則を適用することである．さらに，$S \in \mathcal{M}$ に対して Clash 規則が適用されたとき，$\mathcal{M}$ から S を取り除く．$\mathcal{M}$ に対して推論規則を任意に 1 回適用したとき，$\mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{M}'$ と表す．拡張 C-単一化問題に対しても C-単一化問題と同様に $\rightsquigarrow$ に関する正規形と停止性を考える.

次の正則項における C-単一化アルゴリズムは，文献[1] の有限項上における C-単一化アルゴリズムと文献[14] の正則項上における単一化アルゴリズムを改良したものである.

定義 23 *(正則項における C-単一化アルゴリズム)*
RCUnify(S) =
$\mathcal{M} := \{S\}$;
while $\exists \mathcal{M}'$ *s.t.* $\mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{M}'$ *do* $\mathcal{M} := \mathcal{M}'$;
if ($\mathcal{M}$ が再帰式表現である $\wedge$ $\mathcal{M} \neq \emptyset$)
then return $\{T \mid T \in \mathcal{M}\}$ *else* 失敗;

補題 24 任意の等式集合 P に対して，$P \rightsquigarrow^* S$ かつ S は推論 $\rightsquigarrow$ に関する正規形であるとする．このとき，S が再帰式表現の条件を満たすか否かを判定することは決定可能である.

(証明) 文献[14] と同様の手法によりに示せる. □

以下の等式の重みの組の定義は，文献[15] における等式の重みの定義とは異なる．また，RCUnify の停止性の証明には辞書式順序や多重集合上の順序を使用する.

定義 25 *([1])* 集合 A 上の半順序を $>_A$ とし，B 上の半順序を $>_B$ とする．このとき，$A \times B$ 上の**辞書式順序** $>^{lex}_{A \times B}$ を次のように定義する*:* $(a, b) >^{lex}_{A \times B} (c, d) \Leftrightarrow (a >_A c) \vee (a = c \wedge b >_B d)$. 文脈から集合 A, B が明らかなときは，$>^{lex}$ と略す.

補題 26 *([1])* $>^{lex}$ を 2 つの半順序に基づく辞書式順序とする．*1.* $>^{lex}$ は半順序である.

2. 2 つの半順序が整礎ならば，$>^{lex}$ は整礎である.

定義 27 *([1][7])* A を任意の集合とする．A 上の**有限多重集合**は，集合 $\{x \in A \mid M(x) > 0\}$ が有限なる関数 $M : A \to \mathbb{N}$ である．A 上のすべての有限多重集合からなる集合を $\mathcal{M}(A)$ により表す．以下では，有限多重集合を**多重集合**とよぶ．また，以下では，多重集合を表すのに記号 [ ] を使用する.

定義 28 *([1])* 集合 A 上の半順序 $>$ に対して，多重集合 $\mathcal{M}(A)$ 上の順序 $>_{mul}$ を以下の通りに定義する*:* $X, Y \in \mathcal{M}(A)$ が存在し，$\emptyset \neq X \subseteq M$, $N = (M \setminus X) \cup Y$ かつ $\forall y \in Y.\ \exists x \in X.\ x > y$ を満たすとき，$M >_{mul} N$ と表す.

補題 29 *([1]) 1.* $>$ が半順序ならば，$>_{mul}$ は半順序である.

2. 多重集合上の順序 $>_{mul}$ が整礎であることと，$>$ が整礎であることは同値である.

定義 30 *([6]) 1.* 等式集合 P に対して，P に属する等式 $s \approx_C t$ の**重みの組**を以下の通りに定義する*:* $w(s \approx_C t) = (n_1, n_2)$. ここで，$n_1 = max\{|s|, |t|\}$, $n_2 = max\{|s|, |t|\} - min\{|s|, |t|\}$ とする.

2. 等式 $s \approx_C t, u \approx_C v$ に対して，$w(s \approx_C t) = (n_1, n_2), w(u \approx_C v) = (m_1, m_2)$ とする．このとき，$(n_1, n_2), (m_1, m_2)$ 間の辞書式順序 $>^{lex}$ を以下の通りに定義する*:* $n_1 > m_1$ が成立するか，または，$n_1 = m_1$ かつ $n_2 > m_2$ が成立するときに，$(n_1, n_2) >^{lex} (m_1, m_2)$ とする.

3. 等式集合 P に対して，P に属する任意の等式 $s \approx_C t$ の重みの組からなる多重集合を以下の通りに定義する*:* $\|P\| = [(n_1, n_2) \mid \forall s \approx_C t \in P.\ w(s \approx_C t) = (n_1, n_2)]$.

4. 上記 2 の辞書式順序 $>^{lex}$ を等式の重みの組からなる多重集合上へ拡張した順序を $>^{lex}_{mul}$ と表す.

補題 31 $>^{lex}_{mul}$ は整礎な半順序である.

(証明) 自然数上の大小関係 $>$ は整礎な半順序であるから，補題 26, 29 より $>^{lex}_{mul}$ は整礎な半順序である.
□

補題 32 *(i)* Merge 規則が適用されている推論 $S \rightsquigarrow T$ に対して，$\|S\| \geq^{lex}_{mul} \|T\|$ が成り立つ.

(ii) Delete, Decompose, C − Decompose 規則が適用されている推論 $S \rightsquigarrow T$ に対して，$\|S\| >^{lex}_{mul} \|T\|$ が成り立つ．

(iii) Orient, Coalesce 規則が適用されている推論 $S \rightsquigarrow T$ に対して，$\|S\| = \|T\|$ が成り立つ．

(証明) $\rightsquigarrow$ に適用されている推論規則ごとに示すことができる．

1. Delete 規則; $\|\{s \approx_C s\} \uplus P\| >^{lex}_{mul} \|P\|$.
2. Decompose 規則;

$w(f(s_1, \ldots, s_n) \approx_C f(t_1, \ldots, t_n)) = (n_1, n_2)$, $w(s_i \approx_C t_i) = (m_{i_1}, m_{i_2})$ $(i = 1, \ldots, n)$ とする．このとき，$(n_1, n_2) >^{lex} (m_{i_1}, m_{i_2})$ を示すことができる．よって，$\|\{f(s_1, \ldots, s_n) \approx_C f(t_1, \ldots, t_n)\} \uplus P\| >^{lex}_{mul} \|\{s_1 \approx_C t_1, \ldots, s_n \approx_C t_n\} \cup P\|$ が成り立つ．

3. C − Decompose 規則;

$w(g(s_1, s_2) \approx_C g(t_1, t_2)) = (n_1, n_2)$, $w(s_1 \approx_C t_1) = (m_1, m_2)$, $w(s_2 \approx_C t_2) = (l_1, l_2)$ とする．このとき，$(n_1, n_2) >^{lex} (m_1, m_2), (n_1, n_2) >^{lex} (l_1, l_2)$ が成り立つ．よって，$\|\{g(s_1, s_2) \approx_C g(t_1, t_2)\} \uplus P\| >^{lex}_{mul} \|\{s_1 \approx_C t_1, s_2 \approx_C t_2\} \cup P\|$ が成り立つ．

同様に，$w(g(s_1, s_2) \approx_C g(t_1, t_2)) = (n_1, n_2)$, $w(s_1 \approx_C t_2) = (m_1, m_2)$, $w(s_2 \approx_C t_1) = (l_1, l_2)$ とする．このとき，$(n_1, n_2) >^{lex} (m_1, m_2), (n_1, n_2) >^{lex} (l_1, l_2)$ が成り立つ． よって，$\|\{g(s_1, s_2) \approx_C g(t_1, t_2)\} \uplus P\| >^{lex}_{mul} \|\{s_1 \approx_C t_2, s_2 \approx_C t_1\} \cup P\|$ が成り立つ．

4. Orient 規則; $\|\{s \approx_C x\} \uplus P\| = \|\{x \approx_C s\} \cup P\|$.
5. Coalesce 規則; $\|\{x \approx_C y\} \uplus P\| = \|\{x := y\}(P) \cup \{x \approx_C y\}\|$.
6. Merge 規則; $w(x \approx_C t) = (n_1, n_2), w(s \approx_C t) = (m_1, m_2)$ とする．このとき，Merge 規則の条件より，$(n_1, n_2) \geq^{lex} (m_1, m_2)$ を示すことができる．よって，$\|\{x \approx_C s, x \approx_C t\} \uplus P\| \geq^{lex}_{mul} \|\{x \approx_C s, s \approx_C t\} \cup P\|$. □

定義 33 等式集合 P に対して，次のように 3 つの重みを定義する．

1. $n_3 = |\{t \approx_C x \in P \mid t \notin \mathcal{V} \wedge x \in \mathcal{V}\}|$.

2. $n_4 = |\{x \in \mathcal{V} \mid \exists s, t.\ x \approx_C y, s \approx_C t \in P \wedge x \in \mathcal{V}(s) \cup \mathcal{V}(t) \wedge y \in \mathcal{V} \wedge x \neq y\}|$.

3. $n_5 = |\{x \approx_C t \in P \mid t \notin \mathcal{V} \wedge x \in \mathcal{V}\}|$.

ここで，等式集合 P に対して，重み n_3, n_4, n_5 を対応させる変換をそれぞれ w_3, w_4, w_5 とする．すなわち，$w_i(P) = n_i$ $(i = 3, 4, 5)$.

定義 34 等式集合 P に対して，4 項組 $(\|P\|, n_3, n_4, n_5)$ を対応させる変換を W で表す．すなわち，$W(P) = (\|P\|, n_3, n_4, n_5)$.

補題 35 $>^{LEX}$ を 4 項組上の辞書式順序とする．このとき，すべての推論 $S \rightsquigarrow T$ に対して，$W(S) >^{LEX} W(T)$ が成り立つ．

(証明) 補題 32 より $\|S\|$ に関して次の順序関係が成り立つ．以下では，重み n_3, n_4, n_5 に関して，次の順序関係が成り立つことを示す．

	$\|S\|$	n_3	n_4	n_5
Delete	$>^{lex}_{mul}$			
Decompose	$>^{lex}_{mul}$			
C − Decompose	$>^{lex}_{mul}$			
Orient	$=$	$>$		
Coalesce	$=$	$=$	$>$	
Merge	$\geq^{lex}_{mul}$	$=$	$=$	$>$

1. 重み n_3 の場合;

(i) Orient; $S = \{s \approx_C x\} \uplus P \rightsquigarrow \{x \approx_C s\} \cup P = T$. このとき，$s \notin \mathcal{V}$ かつ $x \in \mathcal{V}$ より $w_3(S) = 1 + w_3(P) > w_3(P) = w_3(T)$.

(ii) Coalesce; $S = \{x \approx_C y\} \uplus P \rightsquigarrow \{x := y\}(P) \cup \{x \approx_C y\} = T$. このとき，$x \in \mathcal{V}(\{x := y\}(P))$ かつ $y \in \mathcal{V}$ より $w_3(S) = w_3(P) = w_3(\{x := y\}(P)) = w_3(T)$.

(iii) Merge; $S = \{x \approx_C s, x \approx_C t\} \uplus P \rightsquigarrow \{x \approx_C s, s \approx_C t\} \cup P = T$. このとき，$x \in \mathcal{V}$ かつ $s, t \notin \mathcal{V}$ より $w_3(S) = w_3(P) = w_3(T)$.

2. 重み n_4 の場合;

(i) Coalesce; $S = \{x \approx_C y\} \uplus P \rightsquigarrow \{x := y\}(P) \cup \{x \approx_C y\} = T$. このとき，$x \notin \mathcal{V}(\{x := y\}(P))$ より $w_4(S) > w_4(T)$.

(ii) Merge; $S = \{x \approx_C s, x \approx_C t\} \uplus P \rightsquigarrow \{x \approx_C s, s \approx_C t\} \cup P = T$. このとき，$s, t \notin \mathcal{V}$ より $w_4(S) = w_4(T)$.

3. 重み n_5 の場合;

Merge; $S = \{x \approx_C s, x \approx_C t\} \uplus P \rightsquigarrow \{x \approx_C$

$s, s \approx_C t\} \cup P = T$. このとき，$s \notin \mathcal{V}$ より $w_5(S) > w_5(T)$ が成り立つ.

よって，$\mathsf{Delete}, \mathsf{Decompose}, \mathsf{C-Decompose}$ 規則が適用された推論 $S \rightsquigarrow T$ に対して，$\|S\| >^{lex}_{mul} \|T\|$. すなわち，$W(S) >^{LEX} W(T)$. Orient 規則が適用された推論 $S \rightsquigarrow T$ に対して，$\|S\| = \|T\|$ かつ $w_3(S) > w_3(T)$. すなわち，$W(S) >^{LEX} W(T)$. Coalesce 規則が適用された推論 $S \rightsquigarrow T$ に対して，$\|S\| = \|T\|, w_3(S) = w_3(T)$ かつ $w_4(S) > w_4(T)$. すなわち，$W(S) >^{LEX} W(T)$. Merge 規則が適用された推論 $S \rightsquigarrow T$ に対して，$\|S\| \geq^{lex}_{mul} \|T\|, w_3(S) = w_3(T)$, $w_4(S) = w_4(T)$ かつ $w_5(S) > w_5(T)$. すなわち，$W(S) >^{LEX} W(T)$. □

最初に，RCUnify の停止性を示す.

補題 36 *(*RCUnify の停止性*)* 任意の C-単一化問題 S に対して,RCUnify(S) は停止する.

(証明) C-単一化問題 S_0 に対して，RCUnify(S_0) が停止しないと仮定する．定義 23 と補題 24 から，$\mathcal{M}_0 = \{S_0\}$ から始まる C-単一化問題の有限集合の無限推論列 $\mathcal{M}_0 \rightsquigarrow \mathcal{M}_1 \rightsquigarrow \mathcal{M}_2 \rightsquigarrow \ldots$ が存在すると仮定して矛盾を導く．ここで，$\mathcal{M}_i$ は C-単一化問題の有限集合であるから，C-単一化問題の無限推論列 $S_0 \rightsquigarrow S_1 \rightsquigarrow S_2 \rightsquigarrow \ldots$ が存在する．補題 35 より，$W(S_0) >^{LEX} W(S_1) >^{LEX} W(S_2) >^{LEX} \ldots$ が成り立つ．補題 31 より，$>^{lex}_{mul}$ は整礎な半順序である．自然数上の大小関係 $>$ も整礎な半順序であるから，補題 26 よりこれらの辞書式順序 $>^{LEX}$ も整礎な半順序である．よって，矛盾する． □

補題 37 $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ を拡張 C-単一化問題とする．$\mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{M}'$ ならば, $\mathsf{Uinf}^C_{inf}(\mathcal{M}) = \mathsf{Uinf}^C_{inf}(\mathcal{M}')$.

(証明) (1) Delete, Orient, Merge 規則のときは自明である.

(2) $\mathsf{Decompose}, \mathsf{C-Decompose}$ 規則のときは，補題 12 を用いて示せる.

(3) Clash 規則のとき; $\mathcal{M} = \{\{f(s_1, \ldots, s_m) \approx_C g(t_1, \ldots, t_n)\} \uplus P\} \cup \mathcal{M}_0 \rightsquigarrow \mathcal{M}_0$. このとき，$\mathsf{Uinf}^C_{inf}(\mathcal{M}) = \mathsf{Uinf}^C_{inf}(\mathcal{M}_0)$.

(4) Coalesce 規則のとき; $\theta = \{x \approx_C y\}$ とする．θ は再帰式表現の条件を満たすから，補題 19 より $\theta^\star(x) \approx_C \theta^\star(y)$. このとき，補題 20 より，任意の $\sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{\theta\})$ に対して，すべての $z \in \mathcal{V}$ について $\sigma(z) \approx_C \sigma \circ \theta^\star(z)$. すなわち，$\sigma(x) \approx_C \sigma(y)$ のとき, すべての $z \in \mathcal{V}$ について $\sigma(z) \approx_C \sigma \circ \theta^\star(z)$ が成り立つ．$\sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{\{x \approx_C y\} \uplus P\} \cup \mathcal{M}_0)$ とする．すなわち，$\sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{\{x \approx_C y\} \uplus P\})$ または $\sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_0)$.

i) $\sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{\{x \approx_C y\} \uplus P\})$ のとき; このとき，$\sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{x \approx_C y\})$ かつ $\sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{P\})$.

仮定 $\sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{\{x \approx_C y\} \uplus P\})$ と $\sigma(x) \approx_C \sigma(y)$ のときすべての $z \in \mathcal{V}$ について $\sigma(z) \approx_C \sigma \circ \theta^\star(z)$ から，$\sigma(x) \approx_C \sigma(y) \wedge \sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{P\}) \Leftrightarrow \sigma \circ \theta^\star \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{P\}) \wedge \sigma(x) \approx_C \sigma(y)$ が成り立つ．したがって，

$$
\begin{aligned}
& \sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{\{x \approx_C y\} \uplus P\} \cup \mathcal{M}_0) \\
\Leftrightarrow\ & \sigma(x) \approx_C \sigma(y) \wedge \sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{P\} \cup \mathcal{M}_0) \\
\Leftrightarrow\ & \sigma(x) \approx_C \sigma(y) \wedge \sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{P\}) \\
\Leftrightarrow\ & \sigma \circ \theta^\star \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{P\}) \wedge \sigma(x) \approx_C \sigma(y) \\
\Leftrightarrow\ & \sigma \circ \theta^\star \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{P\} \cup \mathcal{M}_0) \wedge \sigma(x) \approx_C \sigma(y) \\
\Leftrightarrow\ & \sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{\theta^\star(P)\} \cup \mathcal{M}_0) \wedge \sigma(x) \approx_C \sigma(y) \\
\Leftrightarrow\ & \sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{\theta^\star(P) \cup \{x \approx_C y\}\} \cup \mathcal{M}_0).
\end{aligned}
$$

ii) $\sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_0)$ のとき;

$$
\begin{aligned}
& \sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{\{x \approx_C y\} \uplus P\} \cup \mathcal{M}_0) \\
\Leftrightarrow\ & \sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_0) \\
\Leftrightarrow\ & \sigma \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\{\theta^\star(P) \cup \{x \approx_C y\}\} \cup \mathcal{M}_0).
\end{aligned}
$$

□

最初に，RCUnify の健全性を示す.

補題 38 *(*RCUnify の健全性*)* S を C-単一化問題とする．RCUnify(S) が再帰式表現の空ではない集合 $\{\sigma_i\}$ を返すならば，正則代入の集合 $\{\sigma_i^\star\}$ は S の C-単一化子の完備集合である.

(証明) 仮定より，$\mathcal{M}_0 = \{S\}$ から始まる C-単一化問題の有限集合の推論列 $\mathcal{M}_0 \rightsquigarrow \mathcal{M}_1 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \mathcal{M}_n$ が存在する．このとき，$\mathcal{M}_n(\neq \emptyset)$ は再帰式表現である．よって，$\{T \mid T \in \mathcal{M}_n\} = \{\sigma_i\}$ が成立する．補題 19 から，正則代入 $\sigma_i^\star$ は再帰式表現 σ_i に対応する C-単一化問題の最汎 C-単一化子である．補題 21 から，$\{\sigma_i^\star\}(= \{T^\star \mid T \in \mathcal{M}_n\})$ は $\mathcal{M}_n$ の C-単一化子の完備集合である．補題 37 から，$\mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_0) = \mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_n) \neq \emptyset$.

以降で $\{\sigma_i^\star\}$ が S の C-単一化子の完備集合であることを示す.

(i) 任意の $\tau \in \{\sigma_i^\star\}$ に対して，$\tau \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_n)$．$\mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_0) = \mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_n)$ より，$\tau \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_0)$ が成り立つ．$\mathcal{M}_0 = \{S\}$ より，$\tau \in \{\sigma_i^\star\}$ は S の C-単一化子である．

(ii) 任意の $\theta \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_0)$ に対して，$\mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_0) = \mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_n)$ より，$\theta \in \mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_n)$．いま，$\{\sigma_i^\star\}$ は $\mathcal{M}_n$ の C-単一化子の完備集合であるから，$\tau \lesssim_C \theta$ を満たす $\tau \in \{\sigma_i^\star\}$ が存在する． □

次に，RCUnify の完全性を示す．

補題 39 *(*RCUnify の完全性*)* S を C-単一化問題とする．このとき，S が C-単一化可能であるならば，RCUnify(S) は失敗しない．

(**証明**) S が C-単一化可能であり，かつ，RCUnify(S) が失敗すると仮定する．このとき，補題 36 より，有限の推論列 $\mathcal{M}_0 = \{S\} \rightsquigarrow \mathcal{M}_1 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \mathcal{M}_n$ が存在し，$\mathcal{M}_n$ が $\rightsquigarrow$ の正規形であり，かつ，$\mathcal{M}_n$ が再帰式表現ではない，または，$\mathcal{M}_n = \emptyset$．

1. $\mathcal{M}_n = \emptyset$; S は C-単一化可能であるから，$\mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_0) \neq \emptyset$. 補題 37 より，$\mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_n) \neq \emptyset$. 一方，$\mathcal{M}_n(=\emptyset)$ のすべての C-単一化子の集合は空集合である．すなわち，$\mathsf{Unif}^C_{inf}(\mathcal{M}_n) = \emptyset$．よって，矛盾する．

2. $\mathcal{M}_n \neq \emptyset$; $\mathcal{M}_n$ は再帰式表現ではないから，再帰式表現ではない $T \in \mathcal{M}_n$ が存在する．$T = \{x_1 \approx_C t_1, \ldots, x_n \approx_C t_n\}$ とする．いま，T が再帰式表現ではないから，$\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ が存在し $(\forall 1 \le j < k.\ t_{i_j} = x_{i_{j+1}}) \wedge t_{i_k} = x_{i_1}$ を満たす．すなわち，$t_{i_1} = x_{i_2}, t_{i_2} = x_{i_3}, \ldots, t_{i_{k-1}} = x_{i_k}, t_{i_k} = x_{i_1}$ が成り立つ．このとき，$T \supseteq \{x_{i_1} \approx_C x_{i_2}, x_{i_2} \approx_C x_{i_3}, \ldots, x_{i_{k-1}} \approx_C x_{i_k}, x_{i_k} \approx_C x_{i_1}\}$ より，T に対して，Coalesce 規則が適用できる．よって，T が $\rightsquigarrow$ の正規形であることに矛盾する． □

最後に，RCUnify の停止性，健全性と完全性から本論文の主定理を示す．

定理 40 *(*主定理*)* S を C-単一化問題とする．このとき，S が C-単一化可能であるならば，S の C-単一化子の完備集合が得られる．

(**証明**) 補題 39 より，RCUnify(S) は失敗しない．補題 36 より，RCUnify(S) は停止する．よって，RCUnify(S) は再帰式表現の空でない集合 $\{\sigma_i\}$ を返す．補題 19 より，正則代入 $\sigma_i^\star$ を再帰式表現 σ_i に対応する C-単一化問題の最汎 C-単一化子とする．補題 38 より，この正則代入の空でない集合 $\{\sigma_i^\star\}$ は S の C-単一化子の完備集合である． □

以下では，正則項上の C-単一化の例を与える．

例 41 *(*C*-*単一化*)* ここでは, 正則項上の *(*構文的*)* 単一化で失敗するが, 正則項上の C-単一化で成功する例を考える．項数 2 の関数記号 g の可換性を次の等式で定義する*:* $C = \{\mathsf{g}(x, y) \approx \mathsf{g}(y, x)\}$．いま，$S = \{\mathsf{g}(\mathsf{f}(x), \mathsf{h}(y)) \approx \mathsf{g}(\mathsf{h}(\mathsf{h}(y)), \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)))\}$ とする．この例は有限項上の C-単一化でも失敗する．

1. 正則項上の単一化 *([14]);*

$$\begin{array}{ll} S = & \{\mathsf{g}(\mathsf{f}(x), \mathsf{h}(y)) \approx \mathsf{g}(\mathsf{h}(\mathsf{h}(y)), \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)))\} \\ \rightsquigarrow_{\mathsf{Dec}} & \{\mathsf{f}(x) \approx \mathsf{h}(\mathsf{h}(y)), \mathsf{h}(y) \approx \mathsf{f}(\mathsf{f}(x))\} \\ \rightsquigarrow_{\mathsf{Clash}} & \bot. \end{array}$$

よって, 正則項上における通常の単一化は失敗する．

2. 正則項上の C-単一化*;* $\mathcal{M} = \{S\}$ とする．

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M} = & \{\{\mathsf{g}(\mathsf{f}(x), \mathsf{h}(y)) \approx_C \mathsf{g}(\mathsf{h}(\mathsf{h}(y)), \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)))\}\} \\ \rightsquigarrow_{\mathsf{C-Dec}} & \left\{ \begin{array}{l} \{\mathsf{f}(x) \approx_C \mathsf{h}(\mathsf{h}(y)), \mathsf{h}(y) \approx_C \mathsf{f}(\mathsf{f}(x))\}, \\ \{\mathsf{f}(x) \approx_C \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)), \mathsf{h}(y) \approx_C \mathsf{h}(\mathsf{h}(y))\} \end{array} \right\} \\ \rightsquigarrow_{\mathsf{Clash}} & \{\{\mathsf{f}(x) \approx_C \mathsf{f}(\mathsf{f}(x)), \mathsf{h}(y) \approx_C \mathsf{h}(\mathsf{h}(y))\}\} \\ \rightsquigarrow^*_{\mathsf{Dec}} & \{\{x \approx_C \mathsf{f}(x), y \approx_C \mathsf{h}(y)\}\} = \mathcal{M}'. \end{array}$$

ここで，$\theta = \{x := \mathsf{f}(x), y := \mathsf{h}(y)\}$ とする．

θ は再帰式表現であるから, 補題 *19* より C-単一化問題 $\{x \approx_C \mathsf{f}(x), y \approx_C \mathsf{h}(y)\}$ の最汎 C-単一化子として $\theta^\star = \{x := \mathsf{f}(\mathsf{f}(\cdots)), y := \mathsf{h}(\mathsf{h}(\cdots))\}$ が求まる．以下では，正則項 $\mathsf{f}(\mathsf{f}(\cdots)), \mathsf{h}(\mathsf{h}(\cdots))$ を $\mathsf{f}^\omega, \mathsf{h}^\omega$ と略記する．このとき, $\theta^\star(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x), \mathsf{h}(y))) = \mathsf{g}(\mathsf{f}^\omega, \mathsf{h}^\omega) \approx_C \mathsf{g}(\mathsf{h}^\omega, \mathsf{f}^\omega) = \theta^\star(\mathsf{g}(\mathsf{h}(\mathsf{h}(y)), \mathsf{f}(\mathsf{f}(x))))$．よって, 実際に $\theta^\star$ は S の C-単一化子である．S が C-単一化可能より定理 *40* から，$\{\theta^\star\}$ は S の C-単一化子の完備集合である．等式 $x \approx_C \mathsf{f}(x)$ に対して, $x \in \mathcal{V}(\mathsf{f}(x))$ より, 有限項上の C-単一化は出現検査で失敗する．

6 むすび

最後に，論文全体のまとめと今後の課題について述べる．

本論文では，正則項上における C-単一化の基礎理論を項書換えシステムの枠組みで与えた．最初に，正則項上における C-単一化を推論規則を用いて定式化

した．次に，その停止性，健全性と完全性を示した．最後に，これらを用いて C-単一化問題 S が C-単一化可能であるならば，S の C-単一化子の完備集合が得られることを示した．

今後の課題は，有限項上の結合律を表す等式と可換な等式に基づく単一化 (AC-単一化 [1] [2] [10]) を正則項上に拡張することである．具体的には，正則項上の AC-単一化を推論規則を用いて定式化し，その理論的な性質を示す．

参考文献

[1] Baader, F. and Nipkow, T.: *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.

[2] Baader, F. and Snyder, W.: *Unification Theory, pp.445–533, in Handbook of Automated Reasoning, vol.I*, Elsevier, 2001.

[3] Colmerauer, A.: *Prolog and Infinite Trees, pp.231–251, in Logic Programming*, Academic Press, 1982.

[4] Colmerauer, A.: Equations and inequations on finite and infinite trees, *Proc. of the International Conf. on Fifth Generation Computer Systems*, 1984, pp. 85–99.

[5] Courcelle, B.: Fundamental properties of infinite trees, *Theoretical Computer Science*, Vol. 25, No. 2(1983), pp. 95–169.

[6] Dershowitz, N. and Jouannaud, J.-P.: *Rewrite systems, pp.243–320, in Handbook of theoretical computer science, vol.B*, MIT Press/Elsevier, 1990.

[7] Ferreira, M.: *Termination of term rewriting: Well-foundedness, totality and transformation*, PhD Thesis, Utrecht University, 1995.

[8] Huet, G.: *Résolution d'équations dans les languages d'ordre* $1, 2, \ldots, \omega$, PhD Thesis, University Paris-7, 1976.

[9] Jaffar, J.: Efficient unification over infinite terms, *New Generation Computing*, Vol. 2, No. 3(1984), pp. 207–219.

[10] Jouannaud, J.-P. and Kirchner, C.: *Solving equations in abstract algebras: A rule-based survey of unification, pp.257–321, in Computational Logic*, MIT Press, 1991.

[11] Martelli, A. and Montanari, U.: An efficient unification algorithm, *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, Vol. 4, No. 2(1982), pp. 258–282.

[12] Martelli, A. and Rossi, G.: Efficient unification with infinite trees in logic programming, *Proc. of the International Conf. on Fifth Generation Computer Systems*, 1984, pp. 202–209.

[13] Mukai, K.: A unification algorithm for infinite trees, *Proc. of the 8th International Joint Conf. on Artificial Intelligence, IJCAI*, 1983, pp. 547–549.

[14] 岩見宗弘: 正則項上の単一化について, コンピュータソフトウェア, 投稿中.

[15] 岩見宗弘: 正則項上の単一化について, 京都大学数理解析研究所講究録, 掲載予定.

[16] 岩見宗弘, 青戸等人: 無限項書き換えシステムにおける強頭部正規化可能性および一般生成性の自動反証, コンピュータソフトウェア, Vol. 29, No. 1(2012), pp. 211–239.