日本ソフトウェア科学会第 32 回大会 (2015 年度) 講演論文集

半単一化問題の比較について

岩見 宗弘

半単一化問題とは, 単一化問題を拡張した概念である. 半単一化問題は, 項書換えシステムの停止性の反証やプログラミング言語の型推論等に応用されている. なお, 半単一化問題は, 一般的に決定不能であることが知られている. また, 決定可能な半単一化問題として, 一意半単一化問題が提案され, 様々な研究が行われてきた. さらに, 新しい半単一化問題として, アンカー付き半単一化が最近提案された. アンカー付き半単一化問題は, 重なりがない再帰スキームを法とした単一化問題を解くために導入された. しかしながら, アンカー付き半単一化問題と他の半単一化問題との比較は十分には行われていない. 特に, 一意半単一化問題との比較は十分ではないと考えられる. 本発表では, 一意半単一化問題とアンカー付き半単一化問題の違いを明確にするための現在進行中の研究を紹介する.

1 はじめに

半単一化問題とは単一化問題を拡張した概念である. 現在までに様々な種類の半単一化問題が提案されてきた. 半単一化問題は一般的に決定不能であることが示されている [5]. 一方, 一意半単一化問題が決定可能であることも知られている. Kapur ら [4] や Oliart と Snyder [6] は一意半単一化問題を解くために効率的なアルゴリズムを提案している. また, 青戸と岩見により一意半単一化問題を解くためのルールに基づいたシステムが再定式化され, そのシステムの停止性について議論されている [1]. さらに最近, Smolka と Tebbi により重なりがない再帰スキームを法とした単一化問題を解くためにアンカー付き半単一化問題が提案されている [7].

再帰スキーム $\mathcal{S}$ における任意の書換え規則の左辺は, $f(x_1,\ldots,x_n)$ のような項として表現される. このとき, f は n 引数の関数記号を表し, $x_1,\ldots,x_n$ は相異なる変数を表す. たとえば, 項 $\mathsf{h}\cdot y$ は変数ではないので, 項 $\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)$ は再帰スキーム $\mathcal{S}$ に属する書換え規則の左辺として出現しない. ここで, 記号'$\cdot$' は 2 引数の特別な関数記号を表し, f は 2 引数の関数記号, h は 0 引数の関数記号, すなわち定数記号を表す. アンカー付き半単一化で用いられる不等式は, $\mathcal{S}$ に属する書換え規則に出現する項に基づいている. 上記の項 $\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)$ はアンカー付き半単一化の不等式の左辺には出現しない.

このように, アンカー付き半単一化の不等式に出現する項には制限が存在する. しかしながら, 一意半単一化の不等式に出現する項には制限が存在しない. たとえば, $E=\{\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)\leqslant \mathsf{f}(x,\mathsf{h}\cdot(\mathsf{h}\cdot y))\}$ は一意半単一化可能であるが, アンカー付き半単一化問題には含まれない.

これらの 2 つの半単一化問題における不等式に出現する項に関する議論はあまりされていないと考えられる. したがって, 我々はアンカー付き半単一化と一意半単一化の文献 [7] における比較はあまり十分ではないと考えた.

本論文では, 一意半単一化とアンカー付き半単一化との違いを明確にするために, 現在進行中の研究†1 を述べる.

* On Comparison of Semi-Unification Problems.

Munehiro Iwami, 島根大学総合理工学研究科, Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University.

†1 This is an revised paper of [3].

2 準備

本節では，本稿で使用する用語等の定義を述べる．この節の定義は文献[1] [2] に基づいている．なお，本稿で省略されている定義等は, 文献[1] [2] [7] を参照して頂きたい．

項数 (引数) を 0 以上の整数とする．項数が固定された**関数記号**の集合を $\mathcal{F}$ で表し，**変数**の可算無限集合を $\mathcal{V}$ で表す．このとき，$\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ を満たすと仮定する．特に，項数 0 の関数記号を**定数記号**とよぶ．$\mathbb{N}^+$ を正整数の集合とする．

集合 $\mathcal{V}$ 上の**項**の集合 $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を次のように帰納的に定義する : (1) $\mathcal{V} \subseteq T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$，すなわち，すべての変数は項である，(2) $f \in \mathcal{F}$ が項数 n の関数記号であり，かつ，$t_1, \ldots, t_n$ が項ならば $f(t_1, \ldots, t_n)$ も項である． 項 t の**位置**の集合を $\mathbb{N}^+$ 上の文字列の集合 $Pos(t)$ と表し，次のように帰納的に定義する : $t = x \in \mathcal{V}$ のとき，$Pos(t) = \{\epsilon\}$．ここで，ϵ は空文字を表す． $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ のとき，$Pos(t) = \{\epsilon\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{ip \mid p \in Pos(s_i)\}$. 位置 ϵ を**根位置**とよぶ. $t(p)$ を項 t の位置 p に出現する記号とよぶ. オブジェクト ζ に出現する変数の集合を $\mathcal{V}(\zeta)$ と表す. たとえば，オブジェクトが項 t の場合，$\mathcal{V}(t)$ は項 t に出現する変数の集合を表す．

記号 $\Box$ を $\mathcal{F}$ に属しない新しい定数記号とする．このとき，**文脈**を $T(\mathcal{F} \cup \{\Box\}, \mathcal{V})$ に属する項と定義する．ここで，$\Box$ を**ホール**とよぶ．文脈 C に属するホール $\Box$ を項 t により置き換えた項を $C[t]$ と表す．ある文脈 C に対して $t = C[s]$ が成り立つとき, 項 s が項 t の**部分項**であるといい，$s \trianglelefteq t$ と表す．**代入** σ とは変数の集合 $\mathcal{V}$ から項の集合 $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ への写像であり，定義域 $\mathsf{dom}(\sigma) = \{x \mid x \neq \sigma(x)\}$ は有限集合である．代入は $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 上の写像へと準同型的に拡張される．定義域が $\mathsf{dom}(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ である代入 σ に対して，$\sigma(x_i) = t_i$ $(1 \leq i \leq n)$ を $\{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\}$ と表す．

ここでは，**等式**は $s \approx t$ と表し，**不等式**は $s \leqslant t$ と表す．また，添字付きの不等式を $s \leqslant_j t$ と表し，添字 j は 1 から k の値をとる．いま，$E = \{s_i \circ_i t_i \mid 1 \leq i \leq n, \circ_i \in \{\approx, \leqslant_1, \ldots, \leqslant_k\}\}$ を等式と添字付き不等式の集合とする．このとき，集合 E が次の条件を満たすとき**半単一化可能**であるという : 代入 $\tau, \rho_1, \ldots, \rho_k$ が存在し，すべての等式 $s_i \approx t_i \in E$ に対して $\tau(s_i) = \tau(t_i)$ が成立し，かつ，すべての不等式 $s_i \leqslant_j t_i \in E$ に対して $\rho_j(\tau(s_i)) = \tau(t_i)$ が成立する．このとき，代入 τ を集合 E の**半単一化子**とよび，代入 $\rho_1, \ldots, \rho_k$ を半単一化子 τ の**剰余代入**とよぶ．半単一化問題とは，与えられた等式と (添字付き) 不等式の集合に対して半単一化子 τ が存在するかを問う問題である．特に添字が $k = 1$ のとき，すなわち不等式の添字が一種類であるとき，半単一化問題を**一意**であるという．一意半単一化問題を考えるとき，不等式の添字は省略する．任意の (一意) 半単一化問題は等式 $s_i \approx t_i \in E$ を新しい変数 z_i を使用することで, 2 つの不等式 $z_i \leqslant s_i, z_i \leqslant t_i$ で置き換えることにより等式がない (一意) 半単一化問題へ帰着できる．このように一般性を失うことなく任意の半単一化問題は不等式の集合のみを扱うと仮定できる．

例 1 *([1][4])* 不等式の集合として $E = \{\mathsf{f}(\mathsf{h}(y), x) \leqslant \mathsf{f}(x, \mathsf{h}(\mathsf{h}(y)))\}$ を考える． このとき，代入として $\sigma = \{x := \mathsf{h}(y')\}$ と $\rho = \{y := y', y' := \mathsf{h}(y)\}$ をとる．ここで y' は新しい変数とする．このとき次のような式が成り立つ．$\rho(\sigma(\mathsf{f}(\mathsf{h}(y), x))) = \rho(\mathsf{f}(\mathsf{h}(y), \mathsf{h}(y'))) = \mathsf{f}(\mathsf{h}(y'), \mathsf{h}(\mathsf{h}(y))) = \sigma(\mathsf{f}(x, \mathsf{h}(\mathsf{h}(y))))$. このように E は半単一化可能であり，代入 σ は半単一化子である．また，代入 ρ は半単一化子 σ の剰余代入である．ここで $\mathsf{f}(\mathsf{h}(y), x)$ と $\mathsf{f}(x, \mathsf{h}(\mathsf{h}(y)))$ は単一化不可能である．

3 一意半単一化問題

本節では, 記号半単一化 ([1]) の概念を紹介する. 本節で用いる定義等は文献[1] に基づく．ここでは，関数記号の集合 $\mathcal{F}$ に属さない特殊な項数 1 の関数記号 ∇ を用いて，一意半単一化問題における剰余代入 ρ を構文的に表現する．

定義 2 *(記号 ∇，∇-変数，∇-項，演算子 ∇, [1]).*

1. **項数 1 の特別な関数記号 ∇** を以降では使用する．この関数記号は $\mathcal{F}$ には属していないと仮定する．
2. **∇-項**を次のように帰納的に定義する : *(i)* 変数 $x \in \mathcal{V}$ と整数 $i \geq 0$ に対して，$\nabla^i(x)$ は ∇-項で

ある．ここで $\nabla^i(x)$ は $\overbrace{\nabla(\cdots\nabla}^{i\,回}(x)\cdots)$ を表している; *(ii)* $t_1,\ldots,t_n$ が ∇-項ならば，項数 n の任意の関数記号 $f\in\mathcal{F}$ に対して，$f(t_1,\ldots,t_n)$ は ∇-項である．∇-項の等式を ∇-等式という．

3. $\nabla^i(x)$ $(i\geq 0)$ の形式の ∇-項は **∇-変数**とよぶ．∇-変数 $\nabla^i(x)$ を x^i と略記する．∇-変数の集合は $\mathcal{V}^*$ で表し，∇-項の集合は $T(\mathcal{F},\mathcal{V}^*)$ で表す．オブジェクト ζ に出現する ∇-変数の集合は $\mathcal{V}^*(\zeta)$ と表す．
4. ∇-項上の 1 **引数の演算** ∇ を次のように帰納的に定義する：*(i)* $\nabla(x^i)=x^{i+1}$; *(ii)* $\nabla(f(t_1,\ldots,t_n))=f(\nabla(t_1),\ldots,\nabla(t_n))$.

例 3 *([1])*

(1) ∇-項 $t=\mathsf{f}(x,\mathsf{g}(\nabla(\nabla(y))))$ を考える．このとき，$t=\mathsf{f}(x,\mathsf{g}(\nabla^2(y)))$ または $t=\mathsf{f}(x,\mathsf{g}(y^2))$ と記述してもよい．

(2) 上記の ∇-項 t に出現する ∇-変数の集合 $\mathcal{V}^*(t)$ は次のように得られる：$\mathcal{V}^*(t)=\{x,y,\nabla(y),\nabla(\nabla(y))\}=\{x,y,y^1,y^2\}$.

(3) 上記の ∇-項 t にさらに 1 つ ∇ 演算子を適用した項 $\nabla(t)$ を考えると次のように式変形できる．$\nabla(t)=\nabla(\mathsf{f}(x,\mathsf{g}(\nabla^2(y))))=\mathsf{f}(\nabla(x),\nabla(\mathsf{g}(\nabla^2(y))))=\mathsf{f}(\nabla(x),\mathsf{g}(\nabla^3(y)))=\mathsf{f}(x^1,\mathsf{g}(y^3))$ また，∇-項 t にさらに 2 つ ∇ 演算子を適用した項 $\nabla^2(t)$ を考えると次のような項が得られる．$\nabla^2(t)=\nabla(\nabla(t))=\mathsf{f}(x^2,\mathsf{g}(y^4))$.

∇-項上の文脈と ∇-項上の部分項関係は通常の文脈と部分項と同様に定義する．また，次のように ∇-代入を定義する．

定義 4 *(∇-代入, [1]).*

1. **∇-代入** σ は次の条件を満たす ∇-変数の集合 $\mathcal{V}^*$ から ∇-項の集合 $T(\mathcal{F},\mathcal{V}^*)$ への部分写像である：*(i)* σ の定義域 $\mathsf{dom}(\sigma)$ は有限である; *(ii)* 各変数 $x\in\mathcal{V}$ に対して高々一つ 0 以上の整数 i が存在し，$x^i\in\mathsf{dom}(\sigma)$ である; *(iii)* 各 ∇-変数 $x^i,x^j\in\mathsf{dom}(\sigma)$ に対して，$y^j\not\trianglelefteq\sigma(x^i)$.
2. ∇-代入 σ の ∇-項 t への適用 $\sigma(t)$ を次のように帰納的に定義する：任意の $i\leq j$ に対して $y^j\notin\mathsf{dom}(\sigma)$ のとき，$\sigma(y^j)=y^j$; ある $i\leq j$ に対して $y^i\in\mathsf{dom}(\sigma)$ のとき，$\sigma(y^j)=\nabla^{j-i}(\sigma(y^i))$; $\sigma(f(t_1,\ldots,t_n))=f(\sigma(t_1),\ldots,\sigma(t_n))$.
3. ∇-項 t に対する ∇-代入 σ の複数回の適用 $\sigma^*(t)$ を次のように定義する：任意の $x^i\in\mathsf{dom}(\sigma)$ に対して $x^i\not\trianglelefteq t$ のとき，$\sigma^*(t)=t$; 上記以外のとき，$\sigma^*(t)=\sigma^*(\sigma(t))$.

例 5 *([1])*

(1) 部分写像 $\sigma=\{x:=\mathsf{a},x^1:=\mathsf{b}\}$ は ∇-代入ではない．なぜならば，σ は ∇-代入の定義の条件 *(ii)* を満たさない，すなわち，変数 x に対して $x\in\mathsf{dom}(\sigma)$ かつ $x^1\in\mathsf{dom}(\sigma)$ である．

(2) 部分写像 $\sigma=\{x^1:=\mathsf{f}(y^1),y^1:=\mathsf{b}\}$ は ∇-代入ではない．なぜならば，∇-代入の定義の条件 *(iii)* を満たさない，すなわち，各 ∇-変数 $x^1,y^1\in\mathsf{dom}(\sigma)$ に対して $y^1\trianglelefteq\mathsf{f}(y^1)=\sigma(x^1)$ である．

(3) 部分写像 $\sigma=\{x^1:=y,y^1:=\mathsf{f}(z^2)\}$ は ∇-代入である．このとき，$\sigma(y^3)=\nabla^2(\sigma(y^1))=\nabla^2(\mathsf{f}(z^2))=\mathsf{f}(z^4)$ である．また，$\sigma^*(x^2)=\sigma^*(\nabla(x^1))=\nabla(\sigma^*(x^1))=\nabla(\sigma^*(\sigma(x^1)))=\nabla(\sigma^*(y))=\sigma^*(\nabla(y))=\sigma^*(y^1)=\sigma^*(\sigma(y^1))=\sigma^*(\mathsf{f}(z^2))=\mathsf{f}(z^2)$ である．

定義 6 *(*記号半単一化問題*, [1]).* ∇-等式の集合 E に対して,E の**半単一化子**とは, すべての等式 $s\approx t\in E$ に対して $\sigma^*(s)=\sigma^*(t)$ を満たす ∇-代入 σ である．集合 E が半単一化子をもつとき,E は**半単一化可能**であるという．**記号半単一化問題**とは, 与えられた ∇-等式の集合に対して半単一化子が存在するかを問う問題である．

定理 7 *([1])* 任意の項 $s,t\in T(\mathcal{F},\mathcal{V})$ に対して，次の命題は同値である：*(i)* $\{\nabla(s)\approx t\}$ は半単一化可能である，*(ii)* $\{s\leqslant t\}$ は半単一化可能である．

注意 8 上記の定理 7 より, 記号半単一化問題が解けることと, 一意半単一化問題が解けることは同値である. よって, 以降では一意半単一化問題と記号半単一化問題は同じ意味で用いる．

我々は記号半単一化に対する推論規則とその適用例を与える．記号半単一化においては, 等式 $s\approx t$ と $t\approx s$ は区別しない．

定義 9 *([1])* ∇-変数の集合 $\mathcal{V}^*$ 上に次の条件を満たす任意の *(強)* 全順序を定義する：*(i)* $i > j$ ならば $x^i \gtrdot x^j$，かつ，*(ii)* $x^i \gtrdot y^j$ ならば $x^{i+1} \gtrdot y^{j+1}$．順序 $\gtrdot$ は，任意の ∇-項 t に対して $t \notin \mathcal{V}^*$ かつ $x^i \not\trianglelefteq t$ を満たすとき，$x^i \gtrdot t$ と拡張できる．

例 10 ∇-項 $\mathsf{h} \cdot y$ と ∇-変数 x の上記の順序 $\gtrdot$ に関する順序関係を考える．いま，$\mathsf{h} \cdot y \notin \mathcal{V}^*$ かつ $x \not\trianglelefteq \mathsf{h} \cdot y$ である，すなわち，$\mathsf{h} \cdot y$ は ∇-変数ではなく，かつ，x は $\mathsf{h} \cdot y$ の部分項ではない．よって，$x \gtrdot \mathsf{h} \cdot y$ が成り立つ．

定義 11 *(*記号半単一化に対する推論規則*,[1])*．記号半単一化に対する推論規則を次のように定義する．ここで，推論規則は ∇-等式の有限集合上に適用され，$\uplus$ は互いに素な和集合を表す．

- Decompose*:* $\{f(s_1, \ldots, s_n) \approx f(t_1, \ldots, t_n)\} \uplus E \Longrightarrow \{s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n\} \cup E$ *(*$f \in \mathcal{F}$ のとき*)*
- Reduce*:* $\{x^i \approx t, C[x^i] \approx u\} \uplus E \Longrightarrow \{x^i \approx t, C[t] \approx u\} \cup E$ *(*$x^i \gtrdot t$ のとき*)*
- Delete*:* $\{x^i \approx x^i\} \uplus E \Longrightarrow E$
- Clash*:* $\{f(s_1, \ldots, s_m) \approx g(t_1, \ldots, t_n)\} \uplus E \Longrightarrow \bot$ *(*$f \neq g, f, g \in \mathcal{F}$ のとき*)*
- Check*:* $\{x^i \approx t\} \uplus E \Longrightarrow \bot$ *(*$t \notin \mathcal{V}^*, x^i \trianglelefteq t$ のとき*)*

ここでは, 定義 11 において述べた推論規則を任意に 1 回使った推論を記号 $\rightsquigarrow$ により表す. $\rightsquigarrow$ の反射推移的閉包を $\rightsquigarrow^*$ と表す.

例 12 我々は次の記号半単一化問題を考える*:* $E = \{\mathsf{f}(\mathsf{h} \cdot y, x) \lessdot \mathsf{f}(x, \mathsf{h} \cdot (\mathsf{h} \cdot y))\}$ †2. 2 つの項 $\mathsf{f}(\mathsf{h} \cdot y, x)$ と $\mathsf{f}(x, \mathsf{h} \cdot (\mathsf{h} \cdot y))$ は単一化不可能である. 我々はこの問題を定義 *11* における記号半単一化の推論規則を用いて解く. $E' = \{\nabla(\mathsf{f}(\mathsf{h} \cdot y, x)) \approx \mathsf{f}(x, \mathsf{h} \cdot (\mathsf{h} \cdot y))\}$ とする. このとき, 次のように推論規則が適用できる.

$$
\begin{array}{ll}
E' = & \{\mathsf{f}(\mathsf{h} \cdot y^1, x^1) \approx \mathsf{f}(x, \mathsf{h} \cdot (\mathsf{h} \cdot y))\} \\
\rightsquigarrow_{\mathsf{Dec}} & \{\mathsf{h} \cdot y^1 \approx x, x^1 \approx \mathsf{h} \cdot (\mathsf{h} \cdot y)\} \\
\rightsquigarrow_{\mathsf{Red}} & \{\mathsf{h} \cdot y^1 \approx x, \mathsf{h} \cdot y^2 \approx \mathsf{h} \cdot (\mathsf{h} \cdot y)\} \ (x \gtrdot \mathsf{h} \cdot y^1) \\
\rightsquigarrow_{\mathsf{Dec}} & \{\mathsf{h} \cdot y^1 \approx x, \mathsf{h} \approx \mathsf{h}, y^2 \approx \mathsf{h} \cdot y\} \\
\rightsquigarrow_{\mathsf{Del}} & \{\mathsf{h} \cdot y^1 \approx x, y^2 \approx \mathsf{h} \cdot y\}
\end{array}
$$

†2 ここで,$(\cdot)$ は文献 [7] において使われている $\mathcal{F}$ に属する項数 2 の関数記号である.

このとき，$\sigma = \{x := \mathsf{h} \cdot y^1, y^2 := \mathsf{h} \cdot y\}$ とする． $\sigma^*(\nabla(\mathsf{f}(\mathsf{h} \cdot y, x))) = \mathsf{f}(\mathsf{h} \cdot y^1, \mathsf{h} \cdot (\mathsf{h} \cdot y)) = \sigma^*(\mathsf{f}(x, \mathsf{h} \cdot (\mathsf{h} \cdot y)))$ より，代入 σ は E の半単一化子である．

4 アンカー付き半単一化問題

本節では, 文献 [7] において提案されたアンカー付き半単一化の概念を紹介する.

ここで, 我々は文献 [7] のアンカー付き半単一化問題を, 文献 [1] の一意半単一化問題と比較するために, その定義を整理し再定式化する. アンカー付き半単一化において, 等式 $s \approx t$ と $t \approx s$ は区別する.

定義 13 *(*項*, [7])*. **定数記号**は a, b, c, **関数記号**は f, g, h, **変数**は x, y, z により表されると仮定する. さらに, **代入変数**が α, β, γ により表されると仮定する. **インスタンス変数** αx は代入変数 α と変数 x の組である. 我々は次の *BNF* 記法により**項**を再定義する. 項は s, t により表す.

$s, t ::= a \mid x \mid \alpha x \mid s \cdot t \mid f(s_1, \ldots, s_n)$

ここで，$f \in \mathcal{F} \setminus \{\cdot\}$ である，すなわち関数記号 f は $(\cdot)$ ではない. 記号 $(\cdot)$ は $\mathcal{F}$ に属する項数 2 の関数記号である.

このとき, 条件 $s_i \not\trianglerighteq g(t_1, \ldots, t_m)$ を満たす *(*$g \in \mathcal{F} \setminus \{\cdot\}, 1 \leq i \leq m$*)*，すなわち，項 $s = f(s_1, \ldots, s_n)$ $(f \in \mathcal{F} \setminus \{\cdot\})$ に対して s の部分項 s_i $(1 \leq i \leq n)$ に出現する関数記号は $(\cdot)$ のみである.

前節における項数 1 の特別な関数記号 ∇ と本節における 1 つの代入変数 α は似たような働きをする.

定義 14 *(*単純項*, [7])*. 項 t が**単純**であるとは, 条件 $t \not\trianglerighteq f(s_1, \ldots, s_n)$ を満たすときをいう *(*$f \in \mathcal{F} \setminus \{\cdot\}$*)*，すなわち，単純項 t は関数記号 $f \in \mathcal{F} \setminus \{\cdot\}$ に対して $f(s_1, \ldots, s_n)$ という形式の項を部分項として含まない.

定義 15 *(*アトム，*[7])* 変数またはインスタンス変数のことを**アトム**とよび, X, Y, Z で表す.

定義 16 *(*アンカー付き条件，*[7])*. E を次のような添字付きの不等式の集合とする*:* $E = \{s_1 \lessdot_1 t_1, \ldots, s_n \lessdot_k t_n\}$. E が次の条件を満たすとき**アンカー付き**であるという.

E に出現する変数の集合の分割 X が存在し，任意

の不等式 $s_i \leqslant_m t_i \in E$ が次の 2 つの条件を満たす.

(1) $\exists A \in X.\ [\forall x \in \mathcal{V}(t_i), x \in A]$.

(2) $\exists A \in X.\ [(\forall x \in \mathcal{V}(s_i), x \in A) \wedge (\forall x \in A,\ \exists p \in Pos(s_i).\ [s_i(p) = x \wedge p \in Pos(t_i)])]$.

定義 17 *(アンカー付き半単一化問題, [7]).* **アンカー付き半単一化問題**とは, アンカー付き条件を満たす与えられたインデックス付きの不等式の集合に対して半単一化子が存在するかを問う問題である.

定義 18 *(変換規則, [7]).* 我々は不等式をいくつかの等式へ次の**変換規則**を用いて分解する.

- $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(s_1, \ldots, s_n) \looparrowright \alpha x_1 \approx s_1, \ldots, \alpha x_n \approx s_n$ *($f \in \mathcal{F} \setminus \{\cdot\}$, $x_i \in \mathcal{V}$, s_i は単純 $(1 \le i \le n)$ のとき)*,
- $s \leqslant t \looparrowright s \approx t$ *(s と t は単純のとき)*,

ここで, 記号 α は不等式に対する新しい代入変数である.

$\looparrowright$ の反射推移的閉包を $\looparrowright^*$ と表す.

定義 19 *(解決形, [7]).* 与えられた等式の集合 E に対して, 次の条件を満たすときに, アトム X が**削除的**であるという: $E = E' \uplus \{X \approx s\}$ のとき, 変数 $X \notin \mathcal{V}(E') \cup \mathcal{V}(s)$ であり, かつ, インスタンス変数 $\alpha X \notin \mathcal{V}(E') \cup \mathcal{V}(s)$ である. 等式の集合 E が**解決形**であるとは, すべての等式が $X \approx s$ の形をしており, X は削除的であり, かつ s は単純であるときをいう.

定義 20 *(アンカー付き半単一化の推論規則, [7]).*

- Bop: $E \uplus \{s_1 \cdot s_2 \approx t_1 \cdot t_2\} \Longrightarrow E \cup \{s_1 \approx t_1, s_2 \approx t_2\}$
- Refl: $E \uplus \{s \approx s\} \Longrightarrow E$
- Orient1: $E \uplus \{s \approx \alpha x\} \Longrightarrow E \cup \{\alpha x \approx s\}$ *(s がインスタンス変数でないとき)*
- Orient2: $E \uplus \{s \approx x\} \Longrightarrow E \cup \{x \approx s\}$ *(s がアトムでないとき)*
- Elim1: $E \uplus \{\alpha x \approx s\} \Longrightarrow E[s/\alpha x] \cup \{\alpha x \approx s\}$ *(s が単純なとき)*
- Elim2: $E \uplus \{x \approx s\} \Longrightarrow E[s/x] \cup \{x \approx s\}$ *($x \notin \mathcal{V}(s)$ かつ s が単純なとき)*
- Clash1: $E \uplus \{a \approx s\} \Longrightarrow \bot$ *($a \neq s$ かつ s がアトムでないとき)*
- Clash2: $E \uplus \{s \approx a\} \Longrightarrow \bot$ *($a \neq s$ かつ s がアトムでないとき)*
- Check1: $E \uplus \{x \approx s\} \Longrightarrow \bot$ *($x \trianglelefteq s$ またはある α に対して $\alpha x \trianglelefteq s$, かつ,$s$ はアトムでないとき)*
- Check2: $E \uplus \{\alpha x \approx s\} \Longrightarrow \bot$ *($\alpha x \trianglelefteq s$ かつ $s \neq \alpha x$ のとき)*

ここでは, 定義 20 における推論規則を任意に 1 回用いた推論を $\vdash$ により表す. $\vdash$ の反射推移的閉包を $\vdash^*$ と表す.

アンカー付き半単一化問題として次の例を与える.

例 21 *([7])* 次のようなインデックス付きの不等式の集合を考える. 定義 *18* の変換規則と定義 *20* の推論規則を用いることにより, 不等式の集合は次のように解決形に変換される.

$$E = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leqslant_1 x_4, \mathsf{g}(x_5, x_6) \leqslant_1 \mathsf{g}(\mathsf{a} \cdot x_1, x_2), \\ \mathsf{f}(x_7, x_8) \leqslant_1 \mathsf{f}(\mathsf{a} \cdot x_3, \mathsf{a} \cdot \mathsf{a} \cdot x_4), \\ x_6 \leqslant_2 x_7, \mathsf{f}(x_1, x_2) \leqslant_2 \mathsf{f}(\mathsf{a} \cdot x_5, \mathsf{a} \cdot \mathsf{a} \cdot x_6), \\ \mathsf{g}(x_3, x_4) \leqslant_2 \mathsf{g}(\mathsf{a} \cdot x_7, x_8) \end{array} \right\}$$

$$\looparrowright^* \vdash^* \left\{ \begin{array}{l} x_1 \approx x_4,\ \alpha x_5 \approx \mathsf{a} \cdot x_4, \alpha x_6 \approx \mathsf{a} \cdot x_3, \\ x_2 \approx \mathsf{a} \cdot x_3, x_7 \approx x_6, \\ x_8 \approx \mathsf{a} \cdot x_5, \beta x_3 \approx \mathsf{a} \cdot x_6, \beta x_4 \approx \mathsf{a} \cdot x_5 \end{array} \right\}$$

このとき, 我々は E の半単一化子として代入 $\sigma = \{x_1 := x_4, x_2 := \mathsf{a} \cdot x_3, x_7 := x_6, x_8 := \mathsf{a} \cdot x_5\}$ を得る. さらに,σ の剰余代入として 2 つの代入 $\rho_1 = \{x_5 := \mathsf{a} \cdot x_4, x_6 := \mathsf{a} \cdot x_3\}$ と $\rho_2 = \{x_3 := \mathsf{a} \cdot x_6, x_4 := \mathsf{a} \cdot x_5\}$ を得る.

5 一意半単一化問題とアンカー付き半単一化問題の比較

本節では, 我々は一意半単一化問題 (USUP と略す) とアンカー付き半単一化問題 (AnSUP と略す) をいくつかの例を用いて比較する. 注意 8 で述べたように, 一意半単一化問題が解けることと記号半単一化問題が解けることは同値である. このため, 以降では, 一意半単一化問題と記号半単一化問題は同じ意味で用いる.

上記の例 12 中の一意半単一化問題は, アンカー付き半単一化問題に含まれない.

注意 22 我々は例 *12* 中の不等式の集合 E を再び考える. 項 $\mathsf{h} \cdot y$ は不等式の左辺 $\mathsf{f}(\mathsf{h} \cdot y, x)$ の部分項であり, かつ, 変数ではないので, この一意半単一化問題はアンカー付き半単一化問題に含まれない.

次の例は, 一意半単一化問題はアンカー付き半単一化問題を含まないことを示す.

例 23 *(AnSUP $\not\subseteq$ USUP, [7]).* 例 *21* 中の不等式の集合 E を再び考える.*Smolka* と *Tebbi* の手法で E の半単一化子を得ることができる *[7]*. しかしながら,E は 2 種類の添字付きの 6 つの不等式からなるので, 一意半単一化問題ではない. よって, 一意半単一化に関する先行研究 *[1][4][6]* は E に適用できない.

次の例は, 一意半単一化問題とアンカー付き半単一化問題に共通部分があることを示す.

例 24 *(USUP $\cap$ AnSUP $\neq \emptyset$).* ここで, 我々は次の例を考える: $E = \{\mathsf{f}(x,y) \leqslant \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y, x)\}$. このとき,2 つの項 $\mathsf{f}(x,y)$ と $\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)$ は単一化不可能である.

1. 最初に, この問題を文献 *[7]* の手法で解く.
   E が定義 *16* のアンカー付き条件を満たすことを示す. $X = \{\{x,y\}\}$ とし $A = \{x,y\}$ とする. このとき, $X = \{A\}$ である. すなわち, 分割 X は 1 つのクラス A からなる. さらに, 不等式 $\mathsf{f}(x,y) \leqslant \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)$ に対する 2 つの条件が次のように成立する.
   (1) $\exists A \in X.\ [x,y \in \mathcal{V}(\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)),\ x,y \in A]$.
   (2) $\exists A \in X.\ [x,y \in \mathcal{V}(\mathsf{f}(x,y)),\ x,y \in A]$, かつ, 変数 $x \in A$ に対して, $[\exists 1 \in Pos(\mathsf{f}(x,y)).\ [f(x,y)(1) = x \wedge 1 \in Pos(\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x))]]$, かつ, 変数 $y \in A$ に対して, $[\exists 2 \in Pos(\mathsf{f}(x,y)).\ [f(x,y)(2) = y \wedge 2 \in Pos(\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x))]]$.
   上記の不等式を等式へ次のように変換する:
   $$\{\mathsf{f}(x,y) \leqslant \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)\} \looparrowright \{\alpha x \approx \mathsf{h}\cdot y, \alpha y \approx x\}$$
   このとき, $\{\alpha x \approx \mathsf{h}\cdot y, \alpha y \approx x\}$ は定義 *19* より, 解決形である. いま,$\sigma = \emptyset$ と $\rho = \{x := \mathsf{h}\cdot y, y := x\}$ とする. $\rho(\sigma(\mathsf{f}(x,y))) = \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x) = \sigma(\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x))$ より, 代入 σ は半単一化子であり, 代入 ρ は剰余代入である.
2. 次に, 我々はこの問題を文献 *[1]* の手法で解く. $E' = \{\nabla(\mathsf{f}(x,y)) \approx \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)\}$ とする. 次のように定義 *11* の推論規則が適用できる.
   $$\begin{array}{rl} E' = & \{\mathsf{f}(x^1,y^1) \approx \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)\} \\ \rightsquigarrow_{\mathsf{Dec}} & \{x^1 \approx \mathsf{h}\cdot y, y^1 \approx x\} \end{array}$$
   このとき,$\sigma = \{x^1 := \mathsf{h}\cdot y, y^1 := x\}$ とする. $\sigma^*(\mathsf{f}(x^1,y^1)) = \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x) = \sigma^*(\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x))$ より, E は半単一化可能である. すなわち, 代入 σ は E の半単一化子である.

6 まとめと今後の課題

本論文では, 一意半単一化問題とアンカー付き半単一化問題をいくつかの例を考えることにより比較した. 我々はアンカー付き半単一化問題には含まれない一意半単一化問題が存在することを示した. さらに, 我々はアンカー付き半単一化問題は一意半単一化問題には含まれず, これら 2 つの問題には共通部分があることを示した. 今後の課題は, 一意半単一化問題とアンカー付き半単一化問題をより理論的に比較することである.

参 考 文 献

[1] Aoto, T. and Iwami, M.: Termination of Rule-Based Calculi for Uniform Semi-Unification, *Proc. the 7th International Conf. on Language and Automata Theory and Applications (LATA) 2013*, LNCS, Vol. 7810, Springer-Verlag, 2013, pp. 56–67.

[2] Baader, F. and Nipkow, T.: *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.

[3] Iwami, M.: Uniform Semi-Unification and Anchored Semi-Unification, *Informal Proc. of the 29th International Workshop on Unification (UNIF) 2015*, 2015, pp. 25.

[4] Kapur, D., Musser, D., Narendran, P., and Stillman, J.: Semi-unification, *Theoretical Computer Science*, Vol. 81, No. 2(1991), pp. 169–187.

[5] Kfoury, A. J., Tiuryn, J., and Urzyczyn, P.: The Undecidability of the Semi-unification Problem, *Information and Computation*, Vol. 102, No. 1(1993), pp. 83–101.

[6] Oliart, A. and Snyder, W.: Fast algorithms for uniform semi-unification, *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 37, No. 4(2004), pp. 455–484.

[7] Smolka, G. and Tebbi, T.: Unification modulo nonnested recursion schemes via anchored semi-unification, *Proc. of the 24th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications (RTA) 2013*, 2013, pp. 271–286.