二値効用下での戦略的操作不可能なケーキ分割メカニズムの提案

伊原 尚正　鶴田 俊佑　東藤 大樹　櫻井 祐子　横尾 真

ケーキ分割問題とは，区間によって参加者の選好が異なる連続的な財を，公平に割り当てる方法を考える問題である．従来の研究では，参加者の効用関数に加法性を仮定していた．しかし，現実においては，参加者は加法的でない選好を持つことがある．そこで，本論文では非加法的な効用である二値効用のもとでケーキ分割問題を考える．初めに，二値効用下での非羨望性とパレート効率性の両立不可能性を示す．次に，戦略的操作不可能性とパレート効率性を満たす，2 つのメカニズムを提案する．また，パレート効率性を満たす割当を発見する問題は NP 困難であることを示す．そこで，参加者数に対して多項式時間で実行可能な近似アルゴリズムを提案する．また，戦略的操作不可能性と非羨望性を満たすメカニズムを提案する．最後に，提案メカニズムの性能を計算機実験によって評価する．

1　序論

メカニズムデザインはミクロ経済学とゲーム理論の一分野であり，複数人の参加者間での意思決定のルールを議論する．これらのルールは，社会的な効率性や，各参加者の効用に関する性質など，いくつかの性質を満たしていることが望ましい．エージェント科学の発展に伴い，メカニズムデザインの研究は人口知能とマルチエージェントシステムの研究分野で盛んに行われている．

ケーキ分割問題は公平分割問題の一分野であり，通常 $[0, 1]$ の連続的な区間で表現される財を参加者に公平に分割する方法を考える問題である [6]．具体的には，ミーティングルームの使用権，計算機資源の利用時間の分配，通信域の使用権などの分割財の分配があげられる．cut-and-choose や moving-knife など，様々なケーキ分割アルゴリズムが提案されている [2] [4]．

ケーキ分割問題において，非羨望性は望ましい性質の中で，最も研究されている性質の 1 つである．あるケーキの割当が非羨望性を満たすならば，その割当のもとでどの参加者も他の参加者の割当を羨ましく思わない．例えば，参加者が 2 人しか存在しないとき，cut-and-choose によって出力される割当は常に非羨望性を満たす．

近年，人工知能やマルチエージェントシステムの研究者は，メカニズムデザインの一分野としてケーキ分割問題を研究し，戦略的操作不可能なケーキ分割メカニズムを研究している [3] [5] [8] [9]．ケーキ分割メカニズムの中には，参加者が欲しがっている部分を割り当てるため，参加者に自身の効用関数を尋ねるものがある．戦略的操作不可能なケーキ分割メカニズムは，参加者がメカニズムに効用関数を申告するとき，真の効用関数を答えることが弱支配戦略となる．

様々な戦略的操作不可能性を満たすケーキ分割メカニズムが提案されているが，従来の研究では参加者の効用関数が加法的であることを仮定しており，参加者の効用関数が加法的でない場合については考慮されていない．そこで本論文では，ある区間の中からある長さ以上の連続的な割当を得られれば効用は 1，得られなければ効用は 0 という二値効用を仮定したもとでのケーキ分割メカニズムについて考察する．

---

* Strategy-proof Cake Cutting Mechanisms for Binary Utility

Takamasa Ihara, Shunsuke Tsuruta, Taiki Todo, Yuko Sakurai, Makoto Yokoo, 九州大学システム情報科学府, ISEE, Kyushu University.

この二値効用は単純で現実に即しており，かつ非加法的である．二値効用の例として，以下の例を挙げる．ミーティング室が必要より短い時間しか割り当てられていないならば，ミーティングを開催することができない．この例では，各参加者が必要としている量より短い区間しか割り当てられなかった場合，その参加者の効用は 0 となる．

本論文では初めに，二値効用のもとではパレート効率性と非羨望性を同時に満たすケーキ分割メカニズムが存在しないことを示す．つまり，メカニズムを考えるうえで，パレート効率性と非羨望性の少なくとも一方を犠牲にしなければならない．そこで，初めに非羨望性を諦め逐次的独裁メカニズム (Serial Dictatorship mechanism, SD) をベースとした，整列逐次的独裁メカニズム (Sorted SD, SSD) と無作為逐次的独裁メカニズム (Randomized SD, RSD) の 2 つのメカニズムを提案する．これらのメカニズムは戦略的操作不可能性とパレート効率性を満たす．次に，パレート効率的な割当を見つける問題は NP 困難であることを示す．そこで，参加者数に対する多項式時間でパレート効率的な割当に近い割当を出力する近似アルゴリズムを提案する．RSD を近似したアルゴリズムを RSDF(RSD by Fixing the order of the allocation pieces)，SSD を近似したアルゴリズムを SSDF(SSD by fixing the order of the allocation pieces) と呼ぶ．また，SSDF をもとに，パレート効率性を犠牲にして，非羨望性を満たすようにしたメカニズムを提案する．このメカニズムを EF-SSDF(Envy-Free SSDF) と呼ぶ．今回の研究成果は図 1 のように表される．RSDF,SSDF,EF-SSDF は割当を参加者数に対する多項式時間で決定しているので，計算量的に効率のよいメカニズムといえる．最後に，提案メカニズムを計算機実験によって比較する．

2 準備

2.1 モデル

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ を参加者の集合とし，$n = |N|$ を参加者数とする．分割する財を区間 $[0, 1]$ で表現する．閉区間 $I = [x, y] \subseteq [0, 1]$ の長さを $\mathrm{len}(I) = y - x$ で表す．また，$I \in X$ を連続でない区間とするとき，

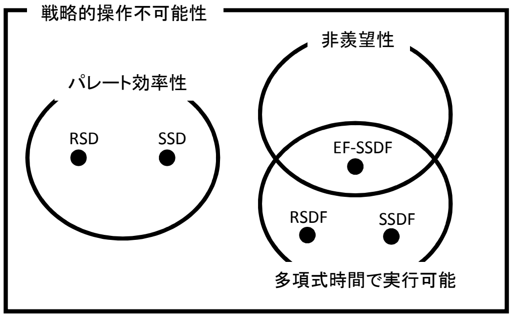

図 1　研究成果

財 X の長さを $\mathrm{len}(X) = \sum_{I \in X} \mathrm{len}(I)$ で表す．

また，各参加者の効用関数は二値効用とする．二値効用において，参加者の効用がとりうる値は 0 か 1 である．

定義 1 (二値効用関数) 参加者 $i \in N$ は区間 $r_i = [s_i, e_i] \subseteq [0, 1]$ において，長さ $d_i \in (0, e_i - s_i]$ の財を必要とする．r_i を参加者 i の評価区間と呼ぶ．

区間 X_i が参加者 i に割り当てられているとき，その参加者の効用は以下のように定義される．

$$U_i(X_i) = \begin{cases} 1 & \exists I \ s.t. \ I \subseteq X_i \text{ and } \mathrm{len}(I \cap r_i) \geq d_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この効用関数によって，ある参加者がミーティング室を午後に 2 時間連続で使いたいような効用を表現できる．

定義より，任意の二値効用関数 U_i は非原子性を満たす．また，効用関数は正規化されていると仮定する．

非原子性: $\forall x \in [0, 1]$ に対し，$U_i([x, x]) = 0$,

正規性: $U_i([0, 1]) = 1$.

非原子性より，参加者の効用を考えるうえでは，開区間，半開区間は閉区間と同一に扱える．

すべての二値効用関数の集合を $\mathcal{U}$ とし，これは全参加者に共通とする．$U = (U_i)_{i \in N}$ を n 人の参加者の効用関数の組とし，$U_{-i} = (U_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$ を n 人の参加者から，参加者 i を除いた参加者の効用関数の組とする．(U_i, U_{-i}) は，参加者 i の効用関数を U_i，他の参加者の効用関数の組を U_{-i} としたときの参加者全員の効用関数の組である．

n 人の参加者に対するケーキの可能な割当を A，A_i を参加者 i に対する割当とする．任意の参加者

の組 $i, j(\neq i) \in N$ に対し $A_i \cap A_j = \emptyset$ であり，$\bigcup_{i \in N} A_i \subseteq [0,1]$ を満たす $(A_i)_{i \in N}$ の集合を A とし，可能な割当と呼ぶ．$\mathcal{A}_N$ を n 人の参加者に対する可能な割当の組とする．

メカニズム f は $f^N : \mathcal{U}^n \to \mathcal{A}_N$ で表される関数の集合とする．簡単のため，f^N を f と表現する．与えられた効用関数の組 U に対して，メカニズム f による出力を $f(U)$ と表す．また，出力 $f(U)$ の中で，参加者 i に対する割当を $f_i(U)$ と表す．

2.2　ケーキ分割メカニズムに望ましい性質

ケーキ分割メカニズムに望ましい性質を定義する．初めに，非羨望性 (Envy-Freeness, EF) を定義する．参加者 i が自身の割当を他の参加者 j の割当と交換して効用が増加するならば，参加者 i は参加者 j に羨望を持つという．非羨望性は，公平性についての代表的な性質であり，全参加者は，他のどの参加者にも羨望を持たないことを保証する性質である．

定義 2 (非羨望性 (EF)) ケーキ分割メカニズム f が非羨望性を満たすとき，任意の $U \in \mathcal{U}^n$，任意の $U_i \in \mathcal{U}$ と任意の $i, j\ (\neq i) \in N$ に対し，$U_i(A_i) \geq U_i(A_j)$ が成り立つ．

次に，パレート効率性 (Pareto Efficiency, PE) を定義する．この性質はメカニズムによる割当の効率性を保証する性質であり，メカニズムデザインの文脈で広く議論される．パレート効率的なメカニズムによる出力に対して，その出力よりも少なくとも一人は効用が増加し，全員が効用が減少しない割当は存在しないことを保証する性質である．

定義 3 (パレート効率性 (PE)) N と $U \in \mathcal{U}^n$ に対して，ある割当 $A' \in \mathcal{A}_N$ が別の割当 $A \in \mathcal{A}_N$ をパレート支配するとは，$U_i(A'_i) \geq U_i(A_i)$ が任意の $i \in N$ に対して成立し，ある $j \in N$ に対して厳密に大小関係が成立する場合である．ケーキ分割メカニズム f がパレート効率性を満たすとき，任意の $U \in \mathcal{U}^n$ に対して，A をパレート支配する割当 $A' \in \mathcal{A}_N$ は存在しない．

最後に，戦略的操作不可能性 (Strategy Proofness, SP) を定義する．これは真の効用関数をメカニズムに申告することが弱支配戦略であることを保証する性質である．

定義 4 (戦略的操作不可能性 (SP)) メカニズム f が戦略的操作不可能性を満たすとき，任意の $i \in N$，任意の $U_{-i} \in \mathcal{U}^{n-1}$，任意の $U_i \in \mathcal{U}$，任意の $U'_i \in \mathcal{U}$ に対して，

$$U_i(f_i((U_i, U_{-i}))) \geq U_i(f_i((U'_i, U_{-i})))$$

が成立する，

3　不可能性定理

本章では，戦略的操作不可能性を考えなくても，二値効用下ではパレート効率性と非羨望性を同時に満たすケーキ分割メカニズムが存在しないことを示す．

定理 1

各参加者の効用関数が二値効用であるとき，パレート効率性と非羨望性を両立するケーキ分割メカニズムは存在しない．

証明 1 背理法を用いて証明を行う．二値効用下でパレート効率性と非羨望性を同時に満たすメカニズム f が存在すると仮定する．*2* 人の参加者 $N = \{1, 2\}$ が存在し，任意の参加者 $i \in N$ が $r_i = [0,1], d_i = 1$ である同じ効用関数を持っていると仮定する． 以下の *2* つの場合を考える．

Case 1: 参加者 1 にケーキ全体を割り当て，参加者 2 には何も割り当てない場合を考える．明らかに，参加者 2 の効用は 0 である．しかし，参加者 2 は，参加者 1 と自身の割り当てを交換することで，自身の利得を 0 から 1 にすることができる，よって，参加者 2 は参加者 1 に羨望を持つ．一般性を失わずに，参加者 2 にケーキ全体を割り当てた場合，参加者 1 は参加者 2 に羨望を持つことが示せる．よって，非羨望性は満たされない．

*Case 2: Case*1 で検討した割当以外の任意の割当を行う場合を考える．この時，参加者 1 と参加者 2 の効用はどちらも 0 である．もしメカニズムデザイナがケーキ全部を片方の参加者に割り当てたならば，もう 1 人の参加者の効用を 0 から下げることなく，割り当てられた参加者の効用を 0 から 1 に増加させることができる．よって，パレート効率性は満たされない．

以上より二値効用のもとで，パレート効率性と非羨望性を満たすメカニズムは存在しない．□

4 戦略的操作不可能性とパレート効率性を満たすケーキ分割メカニズム

前章で，パレート効率性と非羨望性の両立不可能について示した．そこで，初めに非羨望性を諦め，パレート効率性を満たす戦略的操作不可能なケーキ分割メカニズムを提案する．我々が提案するメカニズムは逐次的独裁メカニズムという，戦略的操作不可能性とパレート効率性を満たすメカニズムに基づく [1]．逐次的独裁メカニズム（SD）では，参加者に順序がつけられ，まず可能な全ての割当の組から，1 番目に順序付けられた参加者にとって最良の割当の組を選択する．次に，1 番目の参加者が選択した割当の組から，2 番目の参加者にとって最良の割当の組が選択される．これを繰り返し，割当を決定するメカニズムである．

まず，整列逐次的独裁メカニズム (Sorted SD メカニズム, SSD) を提案する．

メカニズム 1 (SSD)

1. 各参加者に，評価区間 $[s_i, e_i]$ と必要な長さ d_i を申告させる．
2. 参加者を d_i の昇順で並べ替える．同じ長さの d_i が必要な参加者が複数人存在した場合，その参加者間での順序は等確率でランダムに決定する．
3. 最初の参加者から n 番目の参加者まで，順々に独裁者に指名する．指名された k 人目の参加者は，既に指名された $k-1$ 人の効用を変えない制約のもとで，その参加者によって最良の割当を得る．

定理 2 *SSD* は戦略的操作不可能性とパレート効率性を満たす．

証明 2 初めに，*SSD* がパレート効率性を満たすことを証明する．参加者 i が敗者となったとき，つまり，その参加者が割当を受け取れなかったとき，その参加者の効用は 0 である．このとき，参加者 i が独裁者となった時点で，評価区間の中に必要な長さは残っていない．もし，参加者 i の効用を 0 から 1 とするとき，参加者 i の評価区間を割り当てられている勝者は割当を失い，効用は 1 から 0 に減少する．結果として，どの参加者の効用も減少することなく，少なくとも 1 人の参加者の効用を増加させるような割当は存在しない．

次に，*SSD* が戦略的操作不可能性を満たすことを証明する．先に，参加者が評価区間の長さを操作しても効用を増加させることはできないことを示す．二値効用の定義より，$d'_i < d_i$ である d'_i を得ても効用は *0* であるので，このような虚偽申告をする誘因は存在しない．更に，参加者が $d'_i > d_i$ となる d'_i を申告した場合，独裁者となる順番は後になる．これは，d'_i を申告することで，真の申告をした場合に得られる可能性があった割当を得るチャンスを失うことにつながるので，このような d'_i を申告する誘因はない．次に，参加者が評価区間 r_i を操作しても効用を増加させることはできないことを示す．メカニズムデザイナは，割り当てられる区間は変わったとしても，既に決定された参加者の評価値を保証する範囲で，参加者 i の効用を最大化するように割当を決定する．つまり，もしも参加者 i が独裁者となった時点で，まだ効用が 1 となる割当が残っているなら，参加者 i はその割当を受け取れることが保証される．よって，参加者が虚偽の申告を行っても，効用が 1 となるような割当を受け取ることができない．よって，各参加者にとって，評価区間 $[s_i, e_i]$ と必要な長さ d_i を正直に申告することが最良の戦略となる．

□

以下で，SSD の動作例を示す．

例 1 *6* 人の参加者が存在し，選好は以下のとおりとする．

- **参加者 1:** $[s_1, e_1] = [0.25, 0.7]$, $d_1 = 0.4$
- **参加者 2:** $[s_2, e_2] = [0.2, 0.4]$, $d_2 = 0.15$
- **参加者 3:** $[s_3, e_3] = [0, 1]$, $d_3 = 0.2$
- **参加者 4:** $[s_4, e_4] = [0.4, 0.85]$, $d_4 = 0.3$
- **参加者 5:** $[s_5, e_5] = [0.25, 0.45]$, $d_5 = 0.15$
- **参加者 6:** $[s_6, e_6] = [0.5, 1]$, $d_6 = 0.25$

初めに，参加者を d_i の昇順にソートする．この例では，参加者の順序は $2, 5, 3, 6, 4, 1$ と決定される．

- **参加者 2:** $[0.2, 0.35]$ を仮に割り当てる．
- **参加者 5:** 参加者 2 の効用が 1 となることを保証した上では，参加者 5 の効用が 1 となる割当を行うことができない．よって，参加者 5 には割当は行わない．

参加者 3: 参加者 2 の効用が 1 となることを保証した上で，参加者 3 の効用が最大となる割り当てを考える．$[0.2, 0.35]$ を参加者 2 に，$[0.35, 0.55]$ を参加者 3 に割り当てる．

参加者 6: 参加者 2,3 の効用が 1 となることを保証した上で，参加者 6 の効用が最大となる割り当てを考える．$[0.2, 0.35]$ を参加者 2 に，$[0.35, 0.55]$ を参加者 3 に，$[0.55, 0.8]$ を参加者 6 に割り当てる．

参加者 4: 参加者 2,3,6 の効用が 1 となることを保証した上で，参加者 4 の効用が最大となる割り当てを考える．参加者 2 に $[0.2, 0.35]$ を，参加者 3 に $[0, 0.2]$ を，参加者 6 に $[0.7, 0.95]$ を，参加者 4 に $[0.4, 0.7]$ を割り当てる．

参加者 1: 参加者 2,3,4,6 の効用が 1 となることを保証した上では，参加者 1 の効用が 1 となる割当を行うことができない．よって，参加者 1 には，割り当てを行わない．

結果として，勝者は参加者 $2, 3, 4, 6$ となる．

SSD では長さ d_i の昇順に参加者の順番を決定したが，ランダムに参加者の順序を決定しても，SSD と同様に戦略的操作不可能性とパレート効率性を同時に満たすことを保証する．このメカニズムを無作為選択型独裁メカニズム (Randomized SD メカニズム, RSD) と呼ぶ．

次に，SSD，RSD の計算量について議論する．

定理 3 *SSD,RSD* がパレート効率的な割当を発見する問題は *NP* 困難である．

証明 3 k 人目の参加者が割当可能か判定する問題は，$k-1$ 人目までで勝者となった参加者と k 人目の参加者の全員に割当可能か判定する問題と言い換えることができる．この割当問題は，最早開始時間と締切時間が存在するスケジューリング問題と考えることができ，このスケジューリング問題は *NP* 困難であることが示されている *[7]*．よって，パレート効率的な割当を求める問題は *NP* 困難である． □

5 近似アルゴリズム

前章で述べたように，パレート効率的な割当を決定する問題は NP 困難である．そこで，現実的な時間内で可能な限りパレート効率的な割当に近い割当を求める近似アルゴリズムの提案を行う．提案する割当アルゴリズムは今までの独裁者の順番で決定された割当の順序を変更しない．つまり，k 番目の参加者に割当可能か判定する際，$k-1$ 人目までに割り当てられた位置は変更してもよいが，$k-1$ 人までの参加者に割り当てた区間の位置関係を変化させない．

このアルゴリズムを SSD に適用した近似アルゴリズムを SSDF と呼ぶ．SSDF の動作は以下のようになる．

メカニズム 2 (SSDF)

1. 各参加者に，評価区間 $[s_i, e_i]$ と必要な長さ d_i を尋ねる．

2. 参加者を d_i の昇順で並べ替える．同じ長さの d_i が必要な参加者が複数人存在した場合，その参加者間での順序は等確率でランダムに決定する．

3. 最初の参加者から n 番目の参加者まで，順々に独裁者に指名する．指名された k 人目の参加者は，既に指名された $k-1$ 人の効用と，$[0, 1]$ 区間の 0 地点から 1 地点に向けて，どの順序で割り当てたかを変えない制約のもとで，その参加者によって最良の割当を得る．

このメカニズムはパレート効率的ではないが，SSD の戦略的操作不可能性を満たすのと同じ理由により，戦略的操作不可能性を満たすといえる．また，RSD にこのアルゴリズムを適用した近似アルゴリズムを RSDF と呼ぶ．

次に，この近似アルゴリズムの実行時間について議論する．

定理 4 提案した近似アルゴリズムの実行時間は $O(n^3)$ である．

証明 4 1 人目から n 人目の参加者まで，割り当て可能か判定する．前までに決定した参加者への割当の位置関係を入れ替えないので，k 人目が割り当て可能か判定する場合，判定中の独裁者ををどこに挿入するか，高々n 通り判定を行う．1 つの順序で割当可能かを判定するのにかかる時間は $O(n)$ である．よって，近似アルゴリズムに実行時間は $O(n^3)$ である． □

6 戦略的操作不可能性と非羨望性を満たす

ケーキ分割メカニズム

本章では SSDF を基にして，パレート効率性を諦めるかわりに非羨望性を満たすケーキ分割メカニズムを提案する．SSDF では，参加者は必要な長さ d_i の昇順で順序をつける．しかし，同じ長さが必要な参加者の組が存在した場合，それらの参加者は等確率で順序付けられる．つまり，SSDF で割当を行うと，結果は参加者の順序がどうなるかで決まり，敗者は勝者に羨望を持ちうる．このような不満を避けるために，必要な長さ d_i でグループ分けする．同じ長さが必要な参加者は，同じグループに属する．

メカニズム 3 (Envy-Free SSDF, EF-SSDF)

1. 各参加者に評価区間 $[s_i, e_i]$ と必要な長さ d_i を尋ねる．

2. 他の参加者の評価区間と競合せずに，効用が 1 となる区間を受け取れる参加者にその区間を割り当てる．

3. 参加者を，必要な長さ d_i が同じ参加者ごとにグループ分けする．

4. グループを d_i の昇順で順序付けする． k 番目のグループを g_k とする．

5. 最初のグループ，つまり $k = 1$ から，g_k に含まれる全参加者の全順序で割り当てを試み，それぞれの順序での勝者候補を求める．もしも全ての順序で，同じ参加者集合が勝者となるならば，次のグループ g_{k+1} も同様に判定を行うそうでなければ，g_k の誰にも割り当てを行わず，メカニズムを終了する．それぞれの順番で割り当てを決定する際，提案した近似アルゴリズムを用いる．

定理 5 *EF-SSDF* は戦略的操作不可能性と非羨望性を満たす．

証明 5 *SSD* と同様の議論により，*EF-SSDF* が戦略的操作不可能性を満たしていることは示すことができる．以下では，*EF-SSDF* が非羨望性を満たすことを示す．*EF-SSDF* では，グループ間でどの順序で割り当てを行っても，結果が同じ場合のみ実際に割り当てを行う．よって，グループ内の参加者間で互いに羨望を持つことは無い．さらに，勝者の得た区間は敗者の必要な長さより短いか，敗者の必要な区間と競合していないかのどちらかであるので，どの敗者も勝者に羨望を持つことはない． □

例 2 この例では，例 *1* と同じ問題設定での *EF-SSDF* の動作例を示す．

EF-SSDF では，参加者 2 と 5 の必要な長さは $d_2 = d_5 = 0.15$ であり，6 人の参加者の中で最も短いので，最初のグループ g_1 に所属する．この 2 人について，以下の 2 種類の順序を考える:$2 \to 5$ と $5 \to 2$. 参加者 2 が先に順序つけられたとき，参加者 2 だけに割り当てができるので，参加者 2 が勝者の候補になる．これに対して，参加者 5 が先に順序つけられたとき，参加者 5 だけに割り当てができるので，参加者 5 が勝者の候補になる．2 パターンで違う参加者の組が勝者の候補となったので，メカニズムは停止する．結果として，誰にも割り当ては行われない．

7 計算機実験

提案した近似メカニズムが効率よく財を参加者に割り当てることを示すため，提案メカニズムによる割り当て人数を計算機実験で評価する．本実験は，Intel(R) Core(TM) i7-3960X CPU processors with 32.0GB RAM および，Windows 7 Professional にて行った．

必要な長さ d_i が何種類あるかを div で表す．例えば，$div = 1$ であるならば，全参加者の必要な長さ d_i は単一である．d_i は $[0.10-0.01(div-1), 0.10+0.01(div-1)]$ から一様ランダムに選ばれる．s_i と e_i は，それぞれ $[0, 1-d_i]$，$[s_i+d_i, 1]$ から一様ランダムに選ばれる．参加者人数は 15 人とし，div は 3 から 9 の間とする．

図 2 は各メカニズムでの勝者数の平均値を示している．参加者数 $n = 15$ のとき，最適な割り当てを行った場合の割り当て人数（Optimal）と，SSD による割り当て人数はほぼ同じということができる．div を変化させても，RSD,SSD,RSDF,SSDF での割り当て可能人数はほとんど変わらないが，EF-SSDF では div を増加させると割り当て可能人数も大きく増加する．これは，div が増加し，同じ長さの d_i が必要な参加者が減ったことで，メカニズムが途中で終了する可能性が減ったことが原因だと考えられる．また，最

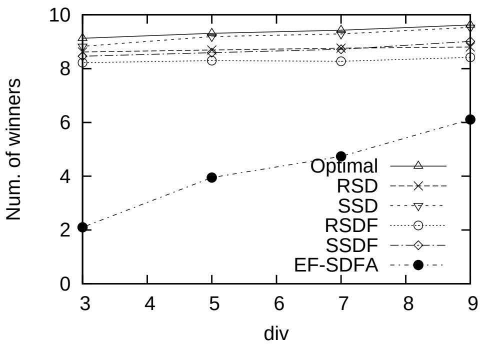

図 2　平均勝者数

初に d_i の長さでソートした場合，ソートしなかった場合に比べて性能が向上していることがわかる．

8　結論

本論文では，二値効用下における戦略的操作不可能性を満たすケーキ分割メカニズムについて議論した．初めに，パレート効率性と非羨望性の両立不可能性を示した．そこで，まず非羨望性を諦め，逐次的独裁メカニズムに基づいた戦略的操作不可能とパレート効率性を満たすメカニズムを提案した．次に，パレート効率的な割当に近い割当を効率的に発見する近似アルゴリズムを提案した．また，パレート効率性を諦め，非羨望性を満たすメカニズムを提案した．今後の課題としては，より複雑な効用関数のもとで研究を行うことが挙げられる．具体的には，評価区間の中である長さの連続的な割当を得られれば嬉しいが，さらに長い割当を得られると更に嬉しいといった効用があげられる．また，戦略的操作不可能性より強い性質である，架空名義操作不可能性を満たすケーキ分割メカニズムについて議論することもあげられる [10]．

謝辞 本研究は科研費（科研費番号 24220003,15H02751,15K12101）の助成を受けました．ここに深く感謝します．

参 考 文 献

[1] Abdulkadiroğlu, A., Sönmez, T.: Random serial dictatorship and the core from random endowments in house allocation problems. Econometrica 66(3), 689–701 (1998)

[2] Austin, A.: Sharing a cake. The Mathematical Gazette pp. 212–215 (1982)

[3] Aziz, H., Ye, C.: New cake cutting algorithms: a random assignment approach to cake cutting. The Computing Research Repository abs/1307.2908 (2013)

[4] Brams, S.J., Taylor, A.D.: An envy-free cake division protocol. American Mathematical Monthly pp. 9–18 (1995)

[5] Chen, Y., Lai, J.K., Parkes, D.C., Procaccia, A.D.: Truth, justice, and cake cutting. Games and Economic Behavior 77(1), 284–297 (2013)

[6] Gamow, G., Stern, M.: Puzzle-math. Macmillan (1958)

[7] Garey, M.R., Johnson, D.S.: Two-processor scheduling with start-times and deadlines. SIAM Journal on Computing 6(3), 416–426 (1977)

[8] Maya, A., Nisan, N.: Incentive compatible two player cake cutting. In: Proceedings of the 8th International Conference on Internet and Network Economics. pp. 170–183. WINE'12 (2012)

[9] Mossel, E., Tamuz, O.: Truthful fair division. In: Algorithmic Game Theory, pp. 288–299. Springer (2010)

[10] Tsuruta, S., Oka, M., Todo, T., Sakurai, Y., Yokoo, M.: Fairness and false-name manipulations in randomized cake cutting. In: Proceedings of the 2015 International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems. pp. 909–917. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems (2015)