日本ソフトウェア科学会第 32 回大会 (2015 年度) 講演論文集

漸進的論理のシークエント計算

蟻坂　竜大

漸進的論理は私が以前考案した論理体系の日本語直訳であり、属性を持つ概念の推論を念頭におく。特有の論理記号として $\gg$ を持ち、$P_1 \gg P_2$ はおおよそ、“P_1 は P_1 を論じる領域内の真により真であり、真である場合には P_1 は P_2 を論じる領域を属性として持ち、その領域内の P_1 の真に依存する真により P_2 は真である。” という命題である。体系というわけだから種類はひとつではないが、この論文内では一番初めに構想した漸進的論理の解釈に基づきシークエント計算を示す。

1　はじめに

漸進的論理とは私が以前考案した論理体系である [2] [3]。命題論理の論理記号に $\gg$ を加え、$P_1 \gg P_2$ をおおよそ、P_1 は P_1 を論じる領域内の真により真であり、真である場合には P_1 は P_2 を論じる領域を属性として持ち、その領域内の (P_1 の真に依存する) 真により P_2 は真である、という命題とする。引用元のように存在を主に扱う場合には、例えば 本 $\gg$ 表題 があるとすると、これは本という概念が、論じられている領域内にあり、その概念は表題という概念を属性に持つ、となる。ちなみに、考案から実に 2 年が経ったが、その存在意義は現在のところ私自身のみにしか知られていない。しかし、漸進的論理が取り扱う題材を考察してみるに、この論理は McCarthy による Context Logic [6] よりも一般的に Context を扱うことができ、Context が何かという根本の問題も棚上げしない。Relevant Logic [1] のように矛盾許容の領域に飛び込まずとも関連性を表現できる。[†1] またこの論理は最小表現の存在や Term-Predicate 間の従来の明確な差別を仮定しない。例えば前述の本と表題という 2 つの概念があるとしよう。本は主概念であり、表題はその属性であるとしても、表題を持つ本はまた主概念となり、それ自体属性を持つだろう。さらに表題を持つ本自体また何かしらの主概念の属性となりうる。そういった概念の相互作用に関する理解が重要であろうことは RDF などの知識を必要とするまでもないだろう。であるから、流行かどうかはさておき、私は漸進的論理は自然言語の特徴を捉える上で重要な論理であると信じて疑わない。

論理の原理は [2] [3] で既に記したのでそちらを参照していただければよいが、ここでは [2] で用いられた Semantics を振り返る。定理等は証明されたものとし、一切触れない。シークエント計算は Semantics を定義後に示す。専門用語があやふやなので所々英語になってしまうところはご容赦いただきたい。漸進的論理の証明論が示されるのは今回が初めてとなる。なお、本来ならば漸進的論理の原理や実用性をより深く論じるべきなのだが、[3] が現時点で査読中のため、この論文内では省かせていただく。

2　関連研究

関連研究を挙げるほどの研究がなされていないが、漸進的論理に概念上関連すると思われるものとして、フラクタルを挙げておく。漸進的論理はプログラム

A Sequent Calculus for Gradual Logic
Ryuta Arisaka, , .

†1　(本 $\gg$ 表題) $\supset$ 本:“表題を持つ本は本である。” 一般的に $P_1 \gg (P_2 \gg (P_3 \gg (\cdots \gg P_k)))$ は矛盾していなければ必然的に P_1 であり、$P_1 \gg P_2$ であり、$P_1 \gg (P_2 \gg P_3)$ であり、$P_1 \gg (P_2 \gg (\cdots \gg P_{k-1}))$ である。

理論、認識信念論理、信念改訂理論[4][5]、オントロジー理論などへ応用できる。

3 背景:Semantics

Literal の集合は $\mathcal{A}$ で表す。構成員は a を使って指す。命題論理の規則に従い、$a \in \mathcal{A}$ ならば $a^c \in \mathcal{A}$ が成り立つ。ここで a^c は a の complement であり、$(a^c)^c = a$ である。$\mathcal{A}$ に $\top$ と $\bot$ を加えたものを $\mathcal{S}$ で表す。その構成員は s で指す。そうすると、漸進的論理の論理式 (F を使う) は以下の文法が認識するものとなる。$F := a \mid \top \mid \bot \mid \neg F \mid F \wedge F \mid F \vee F \mid F \gtrdot F$.
使用されている論理記号のうち $\wedge$ と $\vee$ は associative また commutative であるが、$\gtrdot$ は right-associative である、commutative ではない。結合優先順位であるが、基本的に命題論理の通り、$\gtrdot$ は優先順位最下位とする。さて、Semantics の定義へ向かう。$\mathcal{S}^*$ により、$\mathcal{S}$ の有限列の集合に $\{\epsilon\}$、長さが 0 の列、を足したものを表すことにする。そして以下のように domain function $D : \mathcal{S}^* \to 2^{\mathcal{S}}$ と valuation frame $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ ($\mathcal{I} : S^* \times \mathcal{S} \to \{0,1\}$,$\mathcal{J} : \mathcal{S}^* \backslash \{\epsilon\} \to \{0,1\}$) を定める。

- 各 $s^* \in \mathcal{S}^*$ で、$D(s^*)$ は complementation の下で閉じており、少なくとも $\top$ と $\bot$ を含む。
- 各 $s^* \in \mathcal{S}^*$ で $\mathcal{I}(s^*, \top) = 1$、また $\mathcal{I}(s^*, \bot) = 0$.
- 各 $a \in D(s^*)$ で、$\mathcal{I}(s^*, a)$ は 0 か 1 であるが、両方ではない。また、$\mathcal{I}(s^*, a)$ が 0 ならば $\mathcal{I}(s^*, a^c)$ は 1 であり、$\mathcal{I}(s^*, a)$ が 1 ならば $\mathcal{I}(s^*, a^c)$ は 0 である。
- 各 $s_1^*, s_2^* \in \mathcal{S}^*$、また各 $a \in D(s_1^*) \cap D(s_2^*)$ で、s_1^* と s_2^* の長さが同じならば $\mathcal{I}(s_1^*, a) = \mathcal{I}(s_2^*, a)$ が成り立つ。
- 各 $s_0.s_1....s_k \in \mathcal{S}^* \backslash \{\epsilon\}$ で、$\mathcal{J}(s^*) = 1$ ならば各 0 以上 k 以下の長さ i において、$\mathcal{I}(s_0...s_{i-1}, s_i) = 1$ であり、反対も成り立つ。なお、$i = 0$ のとき、$s_0....s_{i-1} = \epsilon$ とみなす。
- 各 $s_0.s_1....s_k \in \mathcal{S}^* \backslash \{\epsilon\}$ で、$\mathcal{J}(s^*) = 0$ ならばある 0 以上 k 以下の長さ i において、$\mathcal{I}(s_0...s_{i-1}, s_i) = 0$ であり、反対も成り立つ。

これらの定義を用いて下のように forcing relation $\models$、また変換規則を定める。なお、M は valuation frame とする。$\wedge^\dagger$ と $\vee^\dagger$ はブール代数の operators とする。†2

1. $[M \models s_0 \gtrdot s_1 \gtrdot \cdots s_k] = \mathcal{J}(s_0.s_1.\ldots.s_k)$.
2. $[M \models F_1 \wedge F_2] = [M \models F_1] \wedge^\dagger [M \models F_2]$.
3. $[M \models F_1 \vee F_2] = [M \models F_1] \vee^\dagger [M \models F_2]$.
4. 各 $s \in \mathcal{S}$ につき、$\neg s \mapsto s^c$.
5. $\neg(F_1 \wedge F_2) \mapsto \neg F_1 \vee \neg F_2$.
6. $\neg(F_1 \vee F_2) \mapsto \neg F_1 \wedge \neg F_2$.
7. $\neg(s \gtrdot F) \mapsto s^c \vee (s \gtrdot \neg F)$.
8. $(F_1 \gtrdot F_2) \gtrdot F_3 \mapsto$
   $(F_1 \gtrdot F_3) \wedge ((F_1 \gtrdot F_2) \vee (F_1 \gtrdot F_2 \gtrdot F_3))$.
9. $F_1 \wedge F_2 \gtrdot F_3 \mapsto (F_1 \gtrdot F_3) \wedge (F_2 \gtrdot F_3)$.
10. $F_1 \vee F_2 \gtrdot F_3 \mapsto (F_1 \gtrdot F_3) \vee (F_2 \gtrdot F_3)$.
11. $F_1 \gtrdot F_2 \wedge F_3 \mapsto (F_1 \gtrdot F_2) \wedge (F_1 \gtrdot F_3)$.
12. $F_1 \gtrdot F_2 \vee F_3 \mapsto (F_1 \gtrdot F_2) \vee (F_1 \gtrdot F_3)$.

ある F の与えられた domain function 下での (un)satisfiability また (in)validity の定義は次のようになる。F が satisfiable ならば $[M \models F] = 1$ となる valuation frame M がある。その逆も成り立つ。F が valid ならば全ての valuation frame M で $[M \models F] = 1$ となる。その逆もなりたつ。F が invalid ならば $[M \models F] = 0$ となる valuation frame M がある。その逆も成り立つ。F が unsatisfiable ならば全ての valuation frame M で $[M \models F] = 0$ となる。その逆も成り立つ。与えられた domain function において $[M \models F]$ が 0 とも 1 ともならない F はその domain function 下で無効な論理式とし、考慮しない。

4 シークエント計算

この論文の目的であるシークエント計算の定義であるがまず構造を次の文法で定める。

$\Gamma := F \mid \bullet\Gamma \mid \Gamma; \Gamma \mid \Gamma \hookleftarrow \Gamma$.

ここで構造記号である $\hookleftarrow$ は right-associative、同じく構造記号である ; は commutative また associative である。結合順は、$\bullet$、; 、$\hookleftarrow$ の順だが、$\bullet$ の優先順位はいずれの論理記号のそれよりも劣る。 シークエント計算の規則上で現れる構造は実際にその規則が instantiate された時に空になる場合があるので、こ

†2 変換規則を定義せずとも Semantics の定義は可能で、その場合には $\mathcal{J}$ に全く触れずに定義できるが、結局煩雑になるのであまり推奨されない。また、この定義リスト中、8番目、9番目、10番目に見つかる変換規則がない場合 ([3] を参照されたい) の方が Semantics は複雑になる。ここでは触れない。

れ以降、構造を記す必要がある場合には、空であるかもしれない構造の上部には tilde を入れ、明確にする。仮に $\widetilde{\Gamma_1}; \Gamma_2$ とあり、Γ_1 が空の時は、この構造は単に Γ_2 である。仮に $\widetilde{\Gamma_1} \hookleftarrow \Gamma_2$ とあり、Γ_1 が空の時は、この構造は単に Γ_2 である。他の場合も同様に考える。さて、空であるかもしれない構造が与えられたとき i を 1 か 2 のどちらか一方として、$\vdash_i \widetilde{\Gamma_1} \diamond \widetilde{\Gamma_2}$ をシークエントと呼ぶ。$i = 1$ の時、特に第一種シークエントと呼ぶ。同様に $i = 2$ の時、特に第二種シークエントと呼ぶ。最後に Context を次の文法で定める。$\Omega(-) := - \mid \Omega(-) \hookleftarrow \Gamma \mid \Gamma \hookleftarrow \Omega(-) \mid \Gamma; \Omega(-) \mid \Omega(-); \Gamma \mid \bullet\Omega(-)$. ここで $-$ には構造が代入されるものとし、構造が代入された Context は構造である。与えられた Context、$\Omega(-)$、が 0 を含む偶数個の同一でない $\bullet\Omega'(-)$ を sub-context として持つ場合、特にその Context を正の Context と呼び、$\Omega(-)^+$ と明確にする場合もある。奇数の場合は特に負の Context と呼び、$\Omega(-)^-$ と明確にする場合もある。例として、仮に $\Omega(-)$ が $\bullet\bullet-$ ならば $\Omega_1(-)$ と $\Omega_2(-)$ をそれぞれ $\bullet-$ と $-$ とすれば、$\Omega(-)$ は $\bullet\Omega_1(-)$ と $\bullet\Omega_2(-)$ の 2 つの sub-context をもつことになるので、この場合 $\Omega(-)$ は正の Context となる。これで必要な定義は揃った。漸進的論理のシークエント計算を図 1 に記す。全ての場合についての証明は行なっていないものの、考慮に値する [†3] 論理式 F が valid ならば、$\vdash_1 F$ を帰結とする closed derivation tree を図 1 の規則を使用して構築できる、と見られる。また、$\vdash_1 F$ を帰結とする closed derivation tree を図 1 の規則を使用して構築できるならば、F は valid である、と見られる。

以下、図 1 の規則への若干の説明を行ない、現セクションを締めくくる。まずお気づきいただきたいが、第一種シークエントの推論では、$\diamond$ の左側は全く関係してこない。そして、第一種推論の役割は前セクションで挙げた変換規則の実現、また、命題論理の推論を行なうことに限定される。その推論の過程で $\vdash_1 \diamond \widetilde{\Gamma}; a; a^c$ もしくは $\vdash_1 \diamond \widetilde{\Gamma}; \top$ が現れる場合には、そのシークエントを id もしくは $\top$ により即座に閉じてよい。何故かといえば、両シークエント共に正の Context をもち、正の Context 内では ; は $\vee$ と捉えて差し支えないからである。その一方で、例えば $\vdash_1 \diamond (a \hookleftarrow \Gamma_1); (a^c \hookleftarrow \Gamma_2)$ が現れても、そのシークエントを即座に閉じることはできない。Semantics によれば、$\mathcal{I}(\epsilon, a) = 1$ の場合には $\vdash_1 \Gamma_1$ の closed derivation tree を構築できることを、また $\mathcal{I}(\epsilon, a^c) = 1$ の場合には $\vdash_1 \Gamma_2$ の closed derivation tree を構築できることを示さねばならない。$\vdash_1 \diamond (a_1 \hookleftarrow \Gamma_2); (a_1^c \hookleftarrow \Gamma_3); (a_2 \hookleftarrow \Gamma_4); (a_2^c \hookleftarrow \Gamma_5)$ など、構造が多い場合には worst case ではよりたくさんの場合を考える必要がある。そういった場合の生成は第 2 種推論で行なわれ、$\diamond$ の左側が使用される。そして、その左側は $\downarrow$ を経由して $\diamond$ の右側へ送られ、再び第一種推論が行なわれる。前セクションで与えた Semantics 下での漸進的論理の論理式の validity の推論はこの繰り返しで行なわれる。

5 まとめと今後の課題

ここでは漸進的論理のシークエント計算を示した。厳密な Soundness、Completeness の証明を Coq を用いて行なってゆく。

参考文献

[1] Anderson, A. R. and Belnap, N. D.: *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, Vol. 1, Princeton University Press, 1975.

[2] Arisaka, R.: Gradual Classical Logic for Attributed Objects, *ArXiv e-prints:1404.6036*, (2014).

[3] Arisaka, R.: Gradual Classical Logic for Attributed Objects - Extended in Re-Presentation, *ArXiv e-prints:1504.04802*, (2015).

[4] Arisaka, R.: How do you revise your belief set with %$£;@*?, *ArXiv e-prints:1504.05381*, (2015).

[5] Arisaka, R.: Latent Belief Theory and Belief Dependencies: A Solution to the Recovery Problem in the Belief Set Theories, *ArXiv e-prints:1507.01425*, (2015).

[6] McCarthy, J.: Notes on Formalizing Context, *IJCAI*, Morgan Kaufmann, 1993, pp. 555–562.

†3 前述。

$$\dfrac{\vdash_2 \widetilde{\Gamma_1}; \Gamma_2 \diamond\ \widetilde{\Gamma_3}}{\vdash_2 \widetilde{\Gamma_1} \diamond\ (\top \hookleftarrow \Gamma_2); \widetilde{\Gamma_3}}\ \textsf{eval}_1 \qquad \dfrac{\vdash_2 \widetilde{\Gamma_1}; \Gamma_2 \diamond\ \widetilde{\Gamma_4} \qquad \vdash_2 \widetilde{\Gamma_1}; \Gamma_3 \diamond\ \widetilde{\Gamma_4}}{\vdash_2 \widetilde{\Gamma_1} \diamond\ (a \hookleftarrow \Gamma_2); (a^c \hookleftarrow \Gamma_3); \widetilde{\Gamma_4}}\ \textsf{eval}_2$$

$$\dfrac{\vdash_2 \diamond \Gamma_2}{\vdash_1 \diamond \Gamma_2}\uparrow \qquad \dfrac{\vdash_1 \diamond \Gamma_1}{\vdash_2 \Gamma_1 \diamond\ \widetilde{\Gamma_2}}\downarrow$$

$$\dfrac{}{\vdash_1 \diamond \widetilde{\Gamma}; a; a^c}\ \textsf{id} \qquad \dfrac{}{\vdash_1 \diamond \widetilde{\Gamma}; \top}\ \top \qquad \dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(F_1; F_2)^+}{\vdash_1 \diamond \Omega(F_1 \vee F_2)^+}\ \vee^+$$

$$\dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(F_1)^+ \qquad \vdash_1 \diamond \Omega(F_2)^+}{\vdash_1 \diamond \Omega(F_1 \wedge F_2)^+}\ \wedge^+ \qquad \dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(F_1 \hookleftarrow F_2)}{\vdash_1 \diamond \Omega(F_1 \geqslant F_2)}\ \geqslant \qquad \dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(\bullet F)}{\vdash_1 \diamond \Omega(\neg F)}\ \neg$$

$$\dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(F_1)^- \qquad \vdash_1 \diamond \Omega(F_2)^-}{\vdash_1 \diamond \Omega(F_1 \vee F_2)^-}\ \vee^- \qquad \dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(F_1; F_2)^-}{\vdash_1 \diamond \Omega(F_1 \wedge F_2)^-}\ \wedge^- \qquad \dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(s^c)}{\vdash_1 \diamond \Omega(\bullet s)}\ \textsf{red}_1$$

$$\dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(s^c; (s \hookleftarrow \bullet\Gamma))^+}{\vdash_1 \diamond \Omega(\bullet(s \hookleftarrow \Gamma))^+}\ \textsf{red}_2^+ \qquad \dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega((\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_3); (\Gamma_2 \hookleftarrow \Gamma_3))^+}{\vdash_1 \diamond \Omega(\Gamma_1; \Gamma_2 \hookleftarrow \Gamma_3)^+}\ \textsf{red}_3^+$$

$$\dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega((\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_2); (\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_3))^+}{\vdash_1 \diamond \Omega(\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_2; \Gamma_3)^+}\ \textsf{red}_4^+$$

$$\dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_3)^+ \qquad \vdash_1 \diamond \Omega((\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_2); (\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_2 \hookleftarrow \Gamma_3))^+}{\vdash_1 \diamond \Omega((\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_2) \hookleftarrow \Gamma_3)^+}\ \textsf{red}_5^+$$

$$\dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(s^c)^- \qquad \vdash_1 \diamond \Omega(s \hookleftarrow \bullet\Gamma)^-}{\vdash_1 \diamond \Omega(\bullet(s \hookleftarrow \Gamma))^-}\ \textsf{red}_2^- \qquad \dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_3)^- \qquad \vdash_1 \diamond \Omega(\Gamma_2 \hookleftarrow \Gamma_3)^-}{\vdash_1 \diamond \Omega(\Gamma_1; \Gamma_2 \hookleftarrow \Gamma_3)^-}\ \textsf{red}_3^-$$

$$\dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_2)^- \qquad \vdash_1 \diamond \Omega(\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_3)^-}{\vdash_1 \diamond \Omega(\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_2; \Gamma_3)^-}\ \textsf{red}_4^-$$

$$\dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega((\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_3); (\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_2))^- \qquad \vdash_1 \diamond \Omega((\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_3); (\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_2 \hookleftarrow \Gamma_3))^-}{\vdash_1 \diamond \Omega((\Gamma_1 \hookleftarrow \Gamma_2) \hookleftarrow \Gamma_3)^-}\ \textsf{red}_5^-$$

$$\dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(\Gamma_1)}{\vdash_1 \diamond \Omega(\Gamma_1; \Gamma_2)}\ \textsf{Wk} \qquad \dfrac{\vdash_1 \diamond \Omega(\bullet\Gamma_1; \bullet\Gamma_2)}{\vdash_1 \diamond \Omega(\bullet(\Gamma_1; \Gamma_2))}\ \textsf{dist}$$

図 1　GradC: 漸進的論理のシークエント計算