制約付きマッチングのメカニズムデザイン

横尾 真

マッチングは，生徒と学校をマッチする学校選択制，研修医と病院をマッチする研修医配属問題等の様々な応用問題を表現できる一般的な枠組みである．望ましい性質を持つマッチングを求める著名なメカニズムとしてゲールとシャプレイによる受入保留 (DA) メカニズムがあるが，下限制約や地域の上限制約等，マッチングの結果に対して様々な制約が課せられる場合には，DA メカニズムをそのまま適用することができない．本稿では，このような制約付きマッチングでのメカニズム設計について概説する．

1 はじめに

マッチングは，生徒と学校，労働者と企業のような二種類のエージェント間の望ましい組合せを求める問題であり，生徒と学校をマッチする学校選択制，研修医と病院をマッチする研修医配属問題，また，大学関係者に非常に身近な問題として，学生を卒業研究の研究室にマッチする研究室配属問題，さらに生体腎移植において，患者とドナーをマッチする腎臓交換メカニズムなどの広範な応用を持つ．ロイド・シャプレイとアルビン・ロスはマッチングメカニズムの理論とその実践に関する業績で 2012 年のノーベル経済学賞を受賞している．特に，デイビット・ゲールとロイド・シャプレイによる，受入保留 (deferred acceptance, DA) メカニズム [1] がよく知られている．

本稿では，マッチングの結果に対して様々な制約が課せられる制約付きマッチングにおけるメカニズム設計について概説する．最初に，筆者がこの研究テーマに興味を持ったきっかけについて述べる．ごく最近まで，筆者はメカニズムデザインの一分野として，DA メカニズム等の一応の知識はあったものの，このテーマを自分で研究することは考えていなかった．実際，ゲールとシャプレイの論文が出版されたのは 1962 年とずいぶん前 (ちなみに筆者が生まれた年) である．さぞかし，重要な研究テーマのほとんどは研究が進んでおり，大事な研究テーマは残っていないだろうという漠然とした印象を持っていた．

ところが，2011 年度の九州大学電気情報工学科での卒業研究配属の担当となったため，実際に研究室配属のメカニズム設計を手がけることとなった．それまでに用いられていた方式は第一希望優先方式（ボストン方式）と呼ばれるもので，学生側は自身の希望する研究室を第 1 希望から第 n 希望まで申告する．メカニズムはまず，全学生の第 1 希望において定員を満たすまで成績順に配属し，配属されていない学生と定員の残る研究室で次の希望順位について同様に繰り返すというものである．この方式の問題点として，学生同士の読みあいが必要であるという点がある．この方式では，各学生は，自分より成績の良い学生の希望順位に応じて、自分の希望順位を適切に決める必要があるが，この読みを間違えると望ましくない結果になる．例えば，学生 1 の希望は A 研究室であるが，自分の成績だと第 1 希望で通る自信がもてず，B 研究室を第 1 希望にしたとする．しかし，蓋を開けてみると難関の A 研究室は多くの学生が敬遠し，自分より成績が低い学生 2 が配属されたとする．この

Mechanism Design for Constrained Matching

Makoto Yokoo, 九州大学大学院システム情報科学研究院, Faculty of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University.

結果は学生 1 にとっても，A 研究室にとっても望ましくない (後述するフェアでない結果となっている).

せっかくなので，理論的に優れた DA メカニズムを利用したいと教授会で提案して合意が得られた．通常，このような制度の変更は，様々な立場からの意見が出て，なかなか合意が得られないものであるが，この年度では各研究室の定員枠を固定できないという事情により，従来方式では対応が難しいということから，制度の変更の必要性に関して容易に合意が得ることができた．具体的には，この年度は留年等により卒論に着手できない学生が多く，従来の定員枠を満たす十分な学生が確保できないため，各研究室には最低の配属人数を保証し，学生の希望に応じて，追加でさらに一名の学生が配属可能とした．このように状況によって定員が変わってしまうと，従来方式での学生同士の読みあいが格段に難しくなってしまい，従来方式では破綻することが容易に想像できたのである．

当初は単に DA メカニズムを使えば良いと思っていたのだが，各研究室の最低配属人数を保証するためには，DA メカニズムの修整が必要である．これぐらいは既存研究で当然やられているだろうと思って，たまたま知り合いだった日本と米国のマッチング研究のプロフェッショナルに相談したところ，この問題は難しくて良い方法が知られていないと言われて愕然とした次第である．すでに教授会で，既存方式の問題点は，DA メカニズムですべて解決できると大見得を切ってしまっていた．

さすがにいまさら従来方式に戻すとも言えず，何とかする方法がないかと考えたところ，この配属における特殊な性質を使えば，最低配属人数（後述する下限制約）を満たすメカニズムがなんとか設計できることに分かった．具体的には，通常のマッチングでは，学生，研究室といった両方のエージェントが，個別の選好ないしは優先順位を持つことが通例であるのに対して，九州大学での研究室配属では，各研究室毎の学生に対する優先順位は存在せず，学科で共通の成績順を用いることが要求されている．この性質を使って以下のようなメカニズムが構築可能である．成績が上位の学生から順に配属先を決定する．配属先の決定にあたって，残りの学生で下限制約が満たせるなら，この学生は上限制約を満たす範囲で，もっとも好きな研究室に配属される．そうでない場合は，下限制約を未だ満たしていない研究室の中から，もっとも好きな研究室に配属される．この方式を用いた場合，各学生は自分の選好順を偽って申告する誘因を持たない．さらに，この方式を工夫することにより，研究室が個別の優先順位を持つ場合にも対応可能となることが分かった．

以上，やや長文となってしまったが，この経験で分かったこととして，DA メカニズムを実際の問題に適用しようとした場合，マッチングに対して，なんらかの制約が課せられることが通例であり，そのような制約付きのマッチングに関しては，様々な研究課題が残っているということがある．前述の例では，各研究室の配属人数の下限に対して制約が課せられたが，例えば学科がいくつかのコースに分かれている場合，あるコースに学生が集中するのは望ましくないといった，コース毎の上限制約が課せられることも考えられる．

以下，マッチング理論の基礎となる，一対一のマッチングを扱う安定結婚問題と DA メカニズムについて説明し，続いて多対一のマッチングに関して，問題のフォーマルな定義，望ましい性質，および DA メカニズムについて概説する．さらに，地域上限，および個別下限を扱う DA メカニズムの拡張について紹介する．

2 一対一のマッチング (安定結婚問題)

マッチングの理論的な基礎となる問題として，安定結婚問題というものがある．これは男女がそれぞれ n 人いるとして，ある望ましい性質を満たす n 組の男女のペア（マッチング）を作るというものである．望ましい性質として，ここでは安定性を考える．例えば Alice, Becky, Carol, Daisy の 4 名の女性，John, Ken, Lee, Mike の 4 名の男性がいるとする．各男性は 4 人の女性に対して，各女性は 4 人男性に対して，好みの順番が決まっている．当然，好みの順番は（たまたま同じとなるかも知れないが）人によって異なる．Alice にとって，より望ましい男性の順が $J \succ_A K \succ_A L \succ_A M$ であるとし，John にとって，

より望ましい女性の順が $A \succ_J B \succ_J C \succ_J D$ であるとする．ここで，もし Alice のペアが Ken で，John のペアが Becky だと，Alice と John は今のペアと別れてペアとなった方が二人とも今より幸福になることになる．このようなペアを不安定なペアと呼び，不安定なペアを含まないマッチングを安定なマッチングと呼ぶ．

さて，どうしたら安定なマッチングを求めることができるだろうか? 最も単純な方法として，男性の順序を，J, K, L, M で固定し，女性 A, B, C, D の並び替えをすべて生成し，J, K, L, M と組み合わせて，安定かどうかをチェックするという総当り法が考えられるが，これは，最悪，$n!$ の組合せをチェックすることになり，人数が増えると絶望的となる．もっと効率的に安定マッチングを見つける方法として提案されているのが，前述のロイド・シャプレイと，デイビッド・ゲイルによる受入保留 (deferred acceptance, DA) メカニズムである．この方式では，男性／女性は，独身，婚約中のどちらかであり，初期状態では全員独身である．独身の女性が残っていれば，以下の処理を繰り返し適用する．

- 独身の女性は，これまでにまだプロポーズをしていない男性のうちで，最も好みの男性にプロポーズする（男性が婚約中でも気にしない）．
- その際，一人の男性には一回しかプロポーズできない（一度断られた男性には二度とプロポーズできない）．
- 男性は，自分にプロポーズしている女性の中で，最も好みの女性と婚約し，他の女性のプロポーズを断る (現在婚約中の女性がいても，より良い相手がプロポーズしてきたら，現在の婚約を解消して，最も好みの女性と改めて婚約する).

独身の女性がいなくなれば，現在婚約中のペアでマッチングを決定する．

この方式を用いた場合，各女性は，一人の男性に一回しかプロポーズできないので，繰り返しは高々4 回 (n 人なら n 回) で終了する．次に，この方式で安定なマッチングが得られることを示そう．任意の時点で，婚約中の男女に関して以下の性質が成立する．女性に関しては，婚約中の相手よりも望ましい男性には，すでにプロポーズして断られている．また，男性に関しては，今まで自分にプロポーズしてきた女性の中で，最も望ましい女性と婚約している（すなわち，自分にとってより好ましい女性は，自分以外の男性にプロポーズしている）．このことから，全員が婚約している終了時のマッチングが安定であることが導かれる．

さらに，女性にとっては，まだプロポーズしていない中で最も好みの男性にプロポーズするのが最適である，すなわち，正直が最良の策であることが示さる．要は，この方式ではプロポーズして断られても，その後に不利な扱いを受けることはないので，玉砕覚悟で最も好みの相手にプロポーズするのが最適となる．

一方，男性にとっては，現在自分にプロポーズしている女性の中で，最も好みの女性を選ぶのが最適とは限らない．あえて好みでない女性を選ぶことで，結果としてより望ましい女性と結ばれるという，恋愛ドラマで出てくるような複雑な状況が存在し得る．興味のある読者は，ぜひ例を考えてみて頂きたい．これは DA メカニズム固有の問題点ではなく，文献 [3] では，男性と女性の両方にとって正直が最良となるメカニズムは理論的に存在し得ないことが示されている．

3 多対一のマッチング

3.1 モデル

本稿では以下，二種類のエージェントを示す際に，学生と学校という用語を用いるが，学生と研究室，研修医と病院と読みかえれば対応する問題に対応できる．

多対一のマッチング問題は $\langle S, C, q, \succ_S, \succ_C \rangle$ の組で定義される．

- $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$: 学生の集合
- $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$: 学校の集合
- $q = (q_c)_{c \in C}$: 学校の個別の上限のベクトル
- $\succ_S = (\succ_s)_{s \in S}$: 学生の学校に対する厳密な (同点のない) 選好順序のベクトル．$c_1 \succ_s c_2$ は，学生 s が c_2 より c_1 を好むことを示す．
- $\succ_C = (\succ_c)_{c \in C}$: 学校の学生に対する厳密な (同点のない) 優先順序のベクトル．$s_1 \succ_c s_2$ は，学校 c に関して，学生 s_1 の方が s_2 より優先順位が高いことを意味する．

以下の議論では，簡単のため，各学校および各学生に関して，すべての学生およびすべての学校は許容可能である (どうしても行きたくない学校，絶対に入学を許可できない学生は存在しない) ことを仮定する．

定義 1 (マッチング) マッチングは以下の性質を満たすマッピング $\mu : S \cup C \to 2^{S \cup C}$ である[†1]

1. すべての $s \in S$ に関して $\mu(s) \in C$,
2. すべての $c \in C$ に関して $\mu(c) \subseteq S$,
3. すべての s および c に関して $s \in \mu(c)$ の場合，かつその場合に限り $\mu(s) = c$.

定義 2 (実行可能性) マッチングは以下の性質を満たす場合に実行可能であるという: $\forall c \in C, |\mu(c)| \leq q_c$ が成立．

以下，マッチングメカニズムが満たすべき望ましい性質を示す．まず，マッチングにおいて無駄がないという，良く知られたパレート効率性を弱めた性質を定義する．

定義 3 (無駄のないマッチング) マッチング μ において，学生 s，学校 c に関して，$c \succ_s \mu(s)$ および $|\mu(c)| < q_c$ が成立する際，学生 s は学校 c の空きシートを要求するという．マッチング μ において，空きシートを要求する学生が存在しない場合，マッチングは無駄がないという．また，あるメカニズムが，任意の入力に対して無駄のないマッチングを出力する場合，このメカニズムは無駄がないという．

すなわち，学生 s にとって，割り当てられた学校 $\mu(s)$ よりも好ましい学校 c の上限が満たされていない場合，学校 c の空きシートを要求することができる．

次に，学生間の公平性に関する概念を導入する．

定義 4 (フェアなマッチング) マッチング μ において，学生 s に関して以下の条件が成立する場合，s は，学校 c に配属されている別の学生 s' に対して妥当な不満を持つという: $c \succ_s \mu(s)$ かつ $s \succ_c s'$. マッチング μ において，妥当な不満を持つ学生が存在しない場合，マッチングはフェアであるという．また，あるメカニズムが，任意の入力に対してフェアなマッチングを出力する場合，このメカニズムはフェアであるという．

言葉で説明すると，学生 s は，自分が割り当てられた学校 $\mu(s)$ よりも，他の学生 s' が割り当てられた学校 c の方が望ましいと考えており，かつ，学校 c の優先順位において s が s' より上位の場合，s は s' に対して妥当な不満を持つ．

前章で述べた安定なマッチングは，フェアかつ無駄がないマッチングに対応する．ある学生 s が，ある学校 c に割り当てられている学生に妥当な不満を持つ場合，もしくは c の空きシートを要求する場合，s と c が不安定なペアとなる．

定義 5 (戦略的操作不可能性) あるメカニズムにおいて，s 以外の学生の申告を固定し，s が真実の選好をした場合に得られるマッチングを μ，真実と異なる申告をした場合に得られるマッチングを μ' として，常に $\mu(c) \succ_s \mu'(c)$, もしくは $\mu(c) = \mu'(c)$ が成立する場合，このマッチングメカニズムは戦略的操作不可能であるという．

すなわち，戦略的操作不可能なメカニズムでは，学生は自身の選好順序を偽って申告する誘因を持たない．

以下，DA メカニズムの概要を示す．

3.2 DA メカニズム

第 1 ステップ： 各学生を，それぞれ希望順位 1 位の学校に割り振る．定員枠を超えなかった場合は，希望学生をその学校に仮にマッチさせる．定員枠を上回った場合は，希望学生を各学校の優先順位の高い方から定員枠まで仮にマッチさせる（あくまでこの段階では仮マッチであり，後のステップで定員枠からもれる可能性があることに注意）．その他の学生はリジェクトする．

第 2 ステップ： 第 1 ステップでリジェクトされた学生をそれぞれの第 2 希望の学校に割り振る．個々の学校において，第 2 ステップで移動した学生と，既に仮にマッチしている学生を合わせて，第 1 ステップと同様にマッチングを行う．すなわち，定員枠以内であれば全員を仮にマッチとし，定員枠を超えた場合は，各学校の優先順位の高い方から定員枠まで仮にマッチとし，残りの学生はリジェクトされる．」

---

†1 この定義では，厳密には $\mu(s)$ は $\{c\}$ のように要素が一つの集合として記述すべきであるが，$\mu(s) = c$ と略記するのが慣例となっている．

...

第 k ステップ： 第 $k-1$ ステップでリジェクトされた学生を，それぞれの第 k 希望の学校に割り振る．以下，リジェクトされた学生が一人もいなくなるまで同様の手順を続ける．最終的に，それぞれの学校と仮にマッチしていた学生を正式配属とする．

学生を女性，学校を男性と考えれば，前章で示したメカニズムと本質的に同じ処理が行われていることは明らかである．

定理 1 (DA メカニズムの性質)
DA メカニズムは戦略的操作不可能であり，無駄がなくフェアである．

ここでの戦略的操作不可能性の定義は，学生のみを対象としており，学校側が選好を偽る可能性は考慮していないことに注意されたい．DA メカニズムでは，ある学生 s がある学校 c からリジェクトされている場合，c は上限まで学生をアクセプトしており，c にアクセプトされた学生は，c の優先順位で s より上位になっていることから，無駄がなくフェアであることが導かれる．

4 地域上限の導入

研究室配属において，ある学科の研究室が，情報科学，電子システム等の複数のコースに分かれている状況を考えよう．学科のポリシーとして，あるコースに過度に学生が集中することは望ましくないすることは自然である．また，研修医の配属において，大都市圏に過度に研修医が集中することも望ましくないと考えられる．地域上限の導入は，このようなポリシーの実現を可能とする．

前章で示した基本のモデルに，地域の集合 $R = \{r_1, r_2, \ldots\}$ を加える．各地域 r は C の部分集合で互いに素である．また，各地域の地域上限である q_r が与えられる．マッチング μ が feasible となるためには，通常の上限制約に加えて，$|\sum_{c \in r} \mu(c)| \leq q_r$ という，地域上限に関する制約が加えられる．例えば，情報科学コースに 10 の研究室が所属し，各研究室の個別の上限が 3 であるとする．ここで，情報科学コース全体としての配属人数に制約を与える，例えば合計の配属人数が 20 名以下となることを要求するのが地域上限である．

地域上限を扱う最も簡単な方法として，地域上限を満たすように，人為的に個別の学校の上限を厳しくする方法がある．例えば，合計で 20 名以下という上記の制約を満たすためには，個別の研究室の上限を 2 とすればよい．この場合，個別の上限を満たせば自動的に地域の上限を満たすことができるため，得られた個別の上限のみの問題を，通常の DA メカニズムを用いて解けば良い．この方法を人為的キャップ DA と呼ぶ [2]．しかしながら，人為的キャップ DA の問題点として，柔軟性に欠ける点がある．情報科学コース内の研究室で人気に差がある場合，ある研究室には 3 名の学生を割り当て，人気のない研究室には 1 名の学生を割り当てることによっても，合計人数の制約は満足できるが，人為的キャップ DA では，各研究室の配属人数は 2 名以下に制限されてしまう．

この問題点を解決するために考案されたメカニズムが，文献 [2] に示されている Flexible DA メカニズムである．このメカニズムでは，学校の集合 C に関して，学校の選択順リストと呼ばれる，学生を選択する順序が与えられる．Flexible DA メカニズムでは，DA の各ステップ内で，すべての学生が仮マッチもしくはリジェクトになるまで以下を実行する．すなわち，学校の選択順リストの順番に従って，個別の上限および地域の上限に違反しない限り，各学校は希望している学生から，自分の優先順位で最も上位の学生を一人，仮マッチにできる．そうでなければ希望している学生をすべてリジェクトする．選択順リストの最後の学校に関する処理が終われば，選択順リストの先頭に戻って (ラウンドロビン式で) 処理を続行する．

地域上限がある場合，空きシートを要求することの定義の修整が必要となる．

定義 6 (無駄のないマッチング (地域上限)) マッチング μ において，学生 s，学校 c，学校 c が属する地域 r に関して，$c \succ_s \mu(s)$ および $|\mu(c)| < q_c$，および $|\sum_{c' \in r} \mu(c')| < q_r$ が成立する際，学生 s は学校 c の空きシートを要求するという．マッチング μ において，空きシートを要求する学生が存在しない場合，マッチングは無駄がないという．また，あるメカニズ

ムが，任意の入力に対して無駄のないマッチングを出力する場合，このメカニズムは無駄がないという．
すなわち，空きシートを要求するためには，行きたい学校 c に空きがあるだけでは不十分で，c の属する地域にも空きがある必要がある．

しかしながら上記の定義は，c と $\mu(s)$ が同じ地域に属している場合を考慮していないため不十分である．すなわち，c と $\mu(s)$ が同じ地域に属するなら，地域上限に違反することなく，s を $\mu(s)$ から c に移動できる．以下，このような場合に対応する追加の条件を示す．

定義 7 (強い意味での無駄のないマッチング) マッチング μ において，学生 s，学校 c, 学校 c が属する地域 r に関して，$\mu(s)$ が r に属し，$c \succ_s \mu(s)$，$|\mu(c)| < q_c$，および $|\sum_{c' \in r} \mu(c')| = q_r$ が成立する際，学生 s は学校 c の空きシートを地域的に要求するという．マッチング μ において，空きシートを要求する学生，および空きシートを地域的に要求する学生が存在しない場合，強い意味でマッチングは無駄がないという．また，あるメカニズムが，任意の入力に対して強い意味で無駄のないマッチングを出力する場合，このメカニズムは強い意味で無駄がないという．

定理 2 (Flexible DA メカニズムの性質)
Flexible DA メカニズムは，戦略的操作不可能，フェア，かつ無駄がないが，強い意味で無駄がないことは保証されない．一方，人為的キャップ *DA* では，戦略的操作不可能かつフェアであることは保証されるが，人為的に制限される前の本来の上限の元では，通常の意味で無駄がないことも保証されない．
実際，ある状況では，フェアかつ強い意味で無駄のないマッチングは存在し得ないことが示されているため，一般にマッチングがフェアであることと，強い意味で無駄がないことは原理的に両立不可能である．

5　下限制約

学校個別の下限制約が存在する場合のモデルは，3.1 章で示した基本のモデルに，各学校の個別の下限のベクトル $p = (p_c)_{c \in C}$ を加える．また，マッチング μ が実行可能となるためには，通常の上限制約に加えて，$p_c \leq |\mu(c)|$ という，個別の下限に関する制約が加えられる．

また，無駄のないマッチングの定義を以下のように修整する．

定義 8 (無駄のないマッチング (下限制約)) マッチング μ において，学生 s，学校 c, および $c' = \mu(s)$ に関して，$c \succ_s c'$，$|\mu(c)| < q_c$，および $|\mu(c')| > p_{c'}$ が成立する際，学生 s は学校 c の空きシートを要求するという．マッチング μ において，空きシートを要求する学生が存在しない場合，マッチングは無駄がないという．また，あるメカニズムが，任意の入力に対して無駄のないマッチングを出力する場合，このメカニズムは無駄がないという．
すなわち，学生 s が学校 c の空きシートを要求するためには，行きたい学校 c に空きがあるだけでなく，現在割り当てられている学校 c' が下限制約を超えており，s が c に移動しても，すべての上限／下限制約が満足される必要がある．

下限制約がある場合には，地域上限制約の場合と同様に，マッチングがフェアであることと無駄がないことは両立不可能であることが示されている．筆者らは文献 [4] で，下限制約に対応する DA ベースの戦略的操作不可能性を満たす二つのメカニズムを示している．一つは Extended-seat DA メカニズムと呼ばれるもので，フェアであるが無駄がある．もう片方は Multi-stage DA メカニズムと呼ばれ，無駄がないがフェアではない．以下，それぞれのメカニズムのアイデアを示す．

Extended-seat DA メカニズムの基本的なアイデアは，各学校を二つの学校に分割することにより，個別の上限／下限が存在する問題を，個別の上限と，地域の上限が存在する (下限が存在しない) 問題に変換し，地域の上限が扱える Flexible DA メカニズムを用いるというものである．具体的には，各学校 c を通常枠と呼ばれる学校 c' と，拡張枠と呼ばれる学校 c'' に分割する．ここで，通常枠の学校 c' の個別の上限は，本来の下限である p_c として，拡張枠の学校 c'' の個別の上限は，本来の個別の上限と下限の差分である $q_c - p_c$ とする．さらに，拡張枠の学校全体で一つの地域 r を構成し，この地域 r の上限 q_r を，$n - \sum_{c \in C} p_c$ とする．全体で n 人の学生が存在し，拡張枠には合

計で $n - \sum_{c \in C} p_c$ 人の学生のみが配属可能であるため，通常枠には合計で $\sum_{c \in C} p_c$ 人の学生が配属される．ここで，通常枠の学校 c' の個別の上限は p_c であるため，すべての通常枠の学校は上限まで埋まる，すなわち元の問題で下限制約が満たされることが保証される．

定理 3 (Extended-seat DA メカニズムの性質) *Extended-seat DA* メカニズムは下限制約を満たし，戦略的操作不可能かつフェアであるが，メカニズムに無駄がないことは保証されない．

Extended-seat DA メカニズムがフェアであることは，ある学生 s が c からリジェクトされた場合，c にアクセプトされている学生は，全員 s よりも優先順位が高いことから導かれる．

Multi-stage DA メカニズムでは，各学校の個別の優先順位に加えて，すべての学校で共有される，共通の学生に対する順位付け（マスターリスト）が存在することを仮定する．最初に述べた九州大学での研究室配属では，共通の成績順というマスターリストのみが存在していた．Multi-stage DA メカニズムでは，マスターリストを用いて学生を上位グループと下位グループに分ける．その際，下位グループの人数を，$\sum_{c \in C} p_c$，すなわち下限制約の合計と等しくなるように選んでおく．次に，上位グループの学生を，学校個別の上限のみを考慮する通常の DA メカニズムを用いて割り当てる．上位グループの学生を割り当てた状況で，各研究室の上限／下限を再計算する．ここで生じ得る状況は以下の三通りである．

1. すべての下限制約が満足されている場合：下位グループの学生を，通常の DA メカニズムを用いて割り当てる．
2. すべての下限制約の合計が，下位グループの学生の数と等しい場合：各研究室の上限制約を下限制約に置き換えて，下位グループの学生を，通常の DA メカニズムを用いて割り当てる．
3. 下限制約の合計が，下位グループの学生数より少ない場合：最初の処理と同様，下位グループを，さらに上位と下位の二つに分割し，再帰的に同様の処理を行う．その際に，下位グループの人数を，下限制約の合計と等しく選ぶ．

定理 4 (Multi-stage DA メカニズムの性質) *Multi-stage DA* メカニズムは下限制約を満たし，戦略的操作不可能で無駄がないが，フェアであることは保証されない．

各学生にとって，自分がどのグループに含まれるかはマスターリストで決められるため，戦略的な操作を行う余地が存在しない．また，学生 s が上限を満たしていない学校から reject されるのは，上の 2 の処理が生じた場合のみであり，この場合，s が配属される学校は必ず下限ぎりぎりの人数のみが配属されており，空きシートを要求する学生は存在せず，Multi-stage DA メカニズムは無駄がない．しかしながら，マスターリストの順位は，各学校の優先順位とは一般には異なるため，マッチングがフェアであることは保証できない．すなわち，学生 s が学校 c の優先順位でトップであっても，マスターリストでの順位が低ければ，c に配属されない可能性がある．

6 おわりに

本稿では，マッチングの結果に，個別の下限や地域の上限等の制約が課せられる制約付きマッチングに関して概説した．このようなメカニズムに関する研究は，ミクロ経済学，ゲーム理論と計算機科学の境界領域の研究分野であり，歴史のある研究分野ではあるが未解決な問題が山積しており，計算機科学の側からの貢献が期待される．マッチング理論に関して，文献 [5] は，日米にまたがる学校選択制の実際と理論に詳しい良書である．また，解説記事として文献 [6] がある．

参 考 文 献

[1] Gale, D. and Shapley, L. S.: College Admissions and the Stability of Marriage, *American Mathematical Monthly*, Vol. 69(1962), pp. 9–15.

[2] Kamada, Y. and Kojima, F.: Stability and Strategy-Proofness for Matching with Constraints: A Problem in the Japanese Medical Match and Its Solution, *American Economic Review*, Vol. 102, No. 3(2012), pp. 366–70.

[3] Roth, A. E.: The Economics of Matching: Stability and Incentives, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 7(1982), pp. 617–628.

[4] Ueda, S., Fragiadakis, D., Iwasaki, A., Troyan,

P., and Yokoo, M.: Strategy-proof mechanisms for two-sided matching with minimum and maximum quotas, *Proceedings of International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS-2012)*, 2012, pp. 1327–1328. An extended version is available at: `https://sites.google.com/site/petetroyan/files/Fragiadakis_et_al_RES.pdf`.

[5] 安田洋祐 (編): 学校選択制のデザイン*: ゲーム理論アプローチ*, NTT 出版, 2010.

[6] 小島武仁, 安田洋祐: マッチング・マーケットデザイン, 経済セミナー, No. 647(2009), pp. 135–145.